





ض منصور　　عزام صبري
د.علي قوقزه



﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

علم الاحصاء الوصفي المبرمج

علم الاحصاء الوصفي المبرمج

تأليف

أ. د. عوض منصور

عزام صبري

د. علي قوقزة

الطبعة الاولـى

١٩٩٩م - ١٤٢٠هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية 1998/10/1618

رقـــــم التصنيـــــف : 519.530285

المؤلف ومن هو في حكمه: عوض منصور ، علي قوقزه ، عزام صبري

عنـــوان المصنـــف : علم الإحصاء الوصفي المبرمج

الموضـــوع الرئيـــسي : ١- العلوم الطبيعية

٢- الإحصاء الوصفي

بيانـــــات النـــشر : عمان - دار صفاء للنشر والتوزيع

* - تم اعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى

1999 م - 1420 هـ



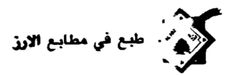
دار صفـــاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distriuting

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan



بين يدي الكتاب

الحمد لله والصلاة والسلام على خير الأنام ورسول البشرية محمد وعلى آله وصحبه اجمعين وبعد

من فضل ا لله ومنته وكرمه ان يمن علينا باصدار سلسلة جديدة في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة بلغة مختلفة من لغات الحاسوب بعد سلسلتنا في الحاسبات الالكترونية التي لاقت رواجا وانتشارا واسعا في الجامعات والكليات والمعاهد في انحاء الوطن العربي .

ونأمل ان تتوالى أعداد هذه السلسلة كأختها لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم ومبادئ اساسية في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة وحرصنا في هذا الكتاب على اغناءه ببرامج الحاسبات لمعظم الطرق الإحصائية وكيفية الوصول إلى نتائج احصائية من خلال استخدام الطالب للحاسوب كما أغنينا الكتاب بمزيد من الأمثلة والتمارين حتى تكون عونا للطالب لتبسيط المحتوى

ويكفي ان نذكر ان جميع الشعائر التعبدية في ديننا الحنيف مرتبطة ارتباطا وثيقا بالرياضيات والإحصاء بأعداد ركعاتها وفي التسابيح ونظام الزكاة والحج وبعدد مرات الطواف والسعي بين الصفا والمروة .. الخ

وقبل الختام نود ان نشكر جميع الأخوة الذين ساهموا في اخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود هذا وإننا نأمل من الأخوة الزملاء أن لا يبخلوا علينا في ابداء رأيهم

أو ملاحظاتهم القيمة حتى نستطيع العمل على تلافيها من خلال الطبعات القادمة

وفي الختام نسأل الله ان يكون هذا الكتاب خالصا لوجه الله الكريم وأن يكون من العلم الذي ينتفع به

المؤلفون

1998/9/20

المحتويات

الفصل الأول

الفصل الثاني
مقاييس النزعة المركزية

الفصل الثالث
مقاييس التشتت

الفصل الرابع
العزوم والتفرطح

الفصل الخامس
التوزيع الطبيعي

الفصل السادس
الارتباط والانحدار

الفصل السابع
السلاسل الزمنية

الفصل الثامن
الأرقام القياسية

الفصل التاسع
الاحصاءات الحيوية

الفصل العاشر
نظرية الاحتمالات

الفصـــل الأول

الطريقــة الإحصائيــة

(1 - 1

مقدمة: الطريقة الإحصائية تعتبر من أهم الطرق التي يقوم عليه مفهوم علم الإحصاء وقبل التعرف على مفهوم هذه الطريقة لابدَّ من التعرف على بعض التعريفات التي تفيد في هذا المجال.

تعريف: علم الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

ولاحقاً صنفه العلماء والمهتمين به إلى صنفين:

تعريف: علم الإحصاء الوصفي هو العلم الذي يساعد في تصنيف وتلخيص وعرض البيانات.

تعريف: علم الإحصاء التحليلي هو العلم الذي يختص في تحليل البيانات المجموعة والملخصة بهدف الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالة عدم التأكد.

تعريف: الطريقة الإحصائية هي مجموعة الطرق العلمية لجمع البيانات وتبويبهاوعرضها ووصفها وتحليلها بهدف استخدام النتائج المنطقية عن الظاهرة قيد البحث.

وتعتمد الطريقة الإحصائية على عناصر أهمها:

أ) جمع البيانات : قبل أن نقوم بهذه العملية علينا مراعاة مايلي:

1) تحديد المعلومات المراد جمعها عن الظاهرة بدقة ووضوح.

2) التعرف على جميع المحاولات السابقة لدراسة الظاهرة أو الظواهر المشابهة لها حتى نتجنب الازدواجية في العمل ونتعرف على الصعوبات التي واجهت الباحثين ونقوم بتذليلها.

3) أن تكون التكلفة لجمع البيانات قليلة إلا في الحالات الإستثنائية.

4) أن تكون المعلومات صحيحة ودقيقة حتى تكون النتائج التي يتوصل إليها الباحث صحيحة.

1 - 2) مصادر جمع البيانات

يمكن الحصول على المعلومات من مصدرين:

1) المصادر غير المباشرة (التاريخية)

2) المصادر المباشرة(الميدانية)

(1- 2- 1) المصادر غير المباشرة(التاريخية)

هي بيانات معدة مسبقا عن ظاهرة ما وباستطاعة الباحث الرجوع إليها وأخذ المعلومات المطلوبة مثل دائرة الاحصاءات العامة ودائرة الأحوال المدنية والوزارات والمؤسسات الخاصة والمؤسسات العامة والمصادر غير المباشرة تشمل الوثائق والمطبوعات والنشرات الإحصائية التي تصدرها الهيئات في البلاد المختلفة وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة. وكمثال على المصادر التاريخية يمكن أخذ المعلومات عن حالات الوفيات والولادة والزواج والطلاق من سجلات دائرة الأحوال المدنية دون الرجوع إلى الوحدات الأصلية.

أما مميزات هذا المصدر للمعلومات أنه يوفر الوقت والجهد والمال أما عيوبه فمن المحتمل أن تكون البيانات غير دقيقة.

1-2-2) المصادر المباشرة(الميدانية)

وهي الحصول على المعلومات من مصادرها الأصلية وذلك عن طريق الإتصال بمفردات المجتمع قيد البحث مباشرة من خلال توجيه الأسئلة إما عبر المقابلة الشخصية أو التفلون أو المراسلة وسنتكلم عن كل منها بإيجاز:

* **المقابلة الشخصية:** وتتم هذه المقابلة بواسطة أشخاص مدربين على القيام بهذه الأعمال ويقوم الباحث المدرب بطرح أسئلة محددة ومعدة مسبقا على الشخص المقصود ويسجل الإجابة عن هذه الأسئلة.

ومن مميزات المقابلة الشخصية الحصول على معلومات دقيقة ويستطيع الباحث الذي يقوم بطرح الأسئلة توضيح أي غموض أو التباس قد تكون موجودة في الأسئلة. وأما عيوبها فهي التكلفة العالية والتحيز الناتج عن تأثير جامع البيانات على الشخص المبحوث سواء كان بقصد أم بغير قصد.

** **التلفون:** ويستخدم كوسيلة أيضا مباشرة وهو غير مكلف لكنه غير متوفر لدى الجميع مما يجعل عملية جمع البيانات مقتصرة على من يملكونه وهه هي أهم عيوب هذه الطريقة.

*** **المراسلة:** ويتم جمع المعلومات عن طريق إرسال استمارة إحصائية إلى الشخص المبحوث عبر البريد، ومن مميزاتها التكلفة القليلة ولكن يعاب عليها احتمال عدم رد الإستمارة إلى الجهة المصدرة لها.

ويقوم الباحث بجمع البيانات على استمارة إحصائية، والإستمارة الإحصائية عبارة عن صحيفة يوجد بها أسئلة وبجانب كل سؤال يوجدفراغ حتى يستطع الباحث أو المجيب من وضع الإجابة بجانب السؤال وقد قسم الإحصائيون

الإستمارات الإحصائية حسب طريقة تعبئة الإستمارة إلى نوعين:

1) كشف البحث: وهو الكشف الذي يقوم الباحث بتعبئته بنفسه

2) صحيفة الإستبيان: وهي التي يقوم الشخص المبحوث بملئها وتسلم إليه إما باليد أو عن طريق البريد ويرفق معها شرح للأسئلة الموجودة بها وكذلك مغلف ملصق عليه الطوابع حتى يشجع الشخص المبحوث على إرجاع صحيفة الإستبيان إلى الجهة المصدرة، ويعاب عليها عدم تجاوب بعض المبحوثين واقتصارها على الأشخاص الملمين بالقراءة والكتابة.

1-3) تصميم الاستمارة الاحصائية

عند تصميم الاستمارة الاحصائية يجب ان نأخذ بالحسبان الإعتبارت التالية:-

أ) على الباحث أن يؤكد وفي مكان بارز في استمارة على سرية المعلومات وبأن هذه المعلومات لايمكن استخدامها إلا لأغراض احصائية.

ب) أن تحتوي الإستمارة على أقل عدد ممكن من الأسئلة لأن كثرة الأسئلة تؤدي إلى ملل الشخص المبحوث مما يدفعه إلى إعطاء معلومات غير دقيقة وبالإضافة إلى ذلك يجب أن يكون عدد الأسئلة كافيا لجمع المعلومات المطلوبة.

ج) يجب أن لاتتطلب الأسئلة عمليات حسابية معقدة أو تحتاج إلى تفكير عميق أو الإعتماد على الذاكرة.

د) يجب أن تكون الأسئلة سهلة وواضحة ويراعى فيها التسلسل المنطقي ويفضل أن تكون الإجابة عليها بكلمة واحدة مثل (نعم) أو (لا) أو الإجابة ذات الإختيار المتعدد.

هـ) يجب أن نتجنب الأسئلة التي توحي بإجابات معينة كالسؤال الإنكاري الذي يدفع المبحوث إلى إعطاء إجابة متحيزة.

و) إعطاء شرح كافي لجميع التعاريف والإصطلاحات والوحدات المستخدمة في القياس في الاستمارة والأمثلة على ذلك كثيرة منها (الناتج القومي) أو (الدخل القومي) والوحدات النقدية مثل (الدينار)، (الدولار) الخ.

بالاضافة الى الاعتبارات السابقة يجب ان نقوم بتجربة الاستمارة والتعرف على مدى صلاحيتها واكتشاف الثغرات الموجودة بها والقيام باصلاحها.

1-4) طرق جمع البيانات أو أساليب جمع البيانات

لعل اهم نقطة للباحث الاحصائي هو كيفية الحصول على البيانات الاحصائية وامامه طريقان:

أ) **المسح الشامل:** وذلك بأخذ المعلومات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة لدراستها وهي افضل الطرق حيث تعطي نتائج دقيقة ومفصلة الا ان هناك صعوبات كالفحص المدمر لبعض المجتمعات او التي لايمكن حصرها كدراسة ملوحة مياه المحيطات التي تحول دون استخدام هذه الطريقة لذا نلجأ إلى طريقة أخرى وهي العينة.

ب) العينة: وهي طريقة تعطي معلومات ونتائج أقل دقة من الأولى حيث أن هناك بعض الأخطاء التي يمكن الوقوع بها وتؤثر على النتائج المعطاة ومنا أخطاء الصدفة أو التحيز. ألا انها اقل تكلفة وجهدا وتوفر كثيرا من الوقت

تعريف: العينة جزء من مجتمع الظاهر قيد الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صحيحا للمجتمع بقصد التعرف على خصائص هذا المجتمع.

الاعتبارات التي تدعو إلى استخدام العينات

- توفير الوقت والجهد والنفقات.

- في بعض الاحيان يكون المجتمع المدروس غير محدود ومثال على ذلك كما سبق وأن ذكرنا دراسة ملوحة مياه احدى المحيطات حيث تضطر في هذه الحالة إلى استخدام العينة.

- في بعض الأحيان يؤدي فحص المفردات إلى تدميرها. فالقيام بالمسح الشامل لدم مريض يعني سحب كل دم المريض بغرض تحليله مما يؤدي إلى قتل المريض وفي هذه الحالة لابد من أخذ عينة من دم المريض وفحصها.

5-1) أنواع العينات

ويوجد نوعان من العينات:

1) العينات العمدية أو الغرضية: ويتم سحبها بطريقة ليست عشوائية وحسب غرض الباحث وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة او لاختبار الاستمارة الاحصائية للتأكد من صلاحيتها.

2) العينات العشوائية: يعني الاختيار العشوائي واتاحة الفرصة امام جميع مفردات المجتمع للظهور في العينة وسنقوم بشرح العينات العشوائية التالية.

أ) **العينة العشوائية البسيطة:** يتم هذا الاختيار في حالتين:

1) في المجتمعات الصغيرة: أي المجتمعات التي عدد مفرداتها (25) مفردة فأقل في هذه الحالة يتم ترقيم المفردات من 1،2........،........(25) وتكتب على بطاقات وحين يطلب عينة ذات حجم (5) مفردات تسحب بطريقة عشوائية دون ارجاع حتى لاتظهر المفردة مكررة.

2) في المجتمعات الكبيرة: أي المجتمعات التي يزيد عدد مفرداتها عن(25) مفردة فنستخدم جدول الأرقام العشوائية واليك المثال التالي موضحا في الخطوات المتبعة لاستخدام هذه الجداول.

مثال: مجتمع حجمه 5000 مفردة يُراد سحب عينة حجمها 50 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك مستعينا بجدول الأرقام العشوائية؟

الحل: للاجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات التالية:-

1) نرقم مفردات المجتمع من 1 الى 5000 بالشكل التالي1...،2 ....، ....، 4999، 5000.

2) بما ان حجم المجتمع ذو اربع منازل لذا لابد من التأكد أن جدول الأرقام العشوائية مكون من اربعة منازل وفي حالة توفر جدول ذي خمس منازل فاننا نحذف خانة الآحاد من هذا الجدول.

3) نبدأ بقراءة الأرقام من جدول الأرقام العشوائية مبتدئين من أقصى اليمين ومن أعلى العمود الأول. آخذين الارقام التي تقل عن 5000 وغير المتكررة.

4) نتابع هذه العملية بشكل متسلسل وكلما انتهينا من عمود نبدأ من اعلى العمود المجاور حتى نحصل على حجم العينة المطلوبة واذا انتهى الجدول و لم نحصل على حجم العينة المطلوبة، فاننا نقوم بحذف خانة العشرات ونكرر العملية السابقة مرة أخرى حتى نحصل على الحجم المطلوب، واذا لم نحصل على الحجم المطلوب نقوم بحذف خانة المئات وهكذا حتى نحصل على الحجم المطلوب واليك بعض هذه الارقام الواردة في العينة.73،311،487،1453،...

وفيما يلي نقدم نموذجاً لجدول الأرقام العشوائية

39432	63421	13410	21144	22341
31562	89632	43222	48715	27560
21433	67562	44444	14530	33224
22560	38432	40577	86231	37624

20430	32312	42633	47536	67311
30013	11462	47554	43231	68416
42321	12310	56773	59560	97318
62530	14562	47554	60110	73266

ب- العينة العشوائية المنتظمة:

لاختيار العينة العشوائية المنتظمة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- نرقم مفردات المجتمع من 1- حجم المجتمع قيد الدراسة
- نختار عشوائيا مفردة البداية للعينة من الأرقام 1-9
- نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة.

$$\text{الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}}$$

- نضيف مقدار الزيادة المنتظمة على مفردة البداية لنحصل على المفردة التالية المختارة في العينة ونتابع اضافة الزيادة المنتظمة بالتتابع إلى ان نحصل على مفردات العينة المطلوبة.

مثال: يراد اختيار عينة حجمها200 مفردة من مجتمع حجمه 4000 مفردة كيف يتم ذلك بطريقة العينة العشوائية المنتظمة؟

الحل: نتبع الخطوات التالية:

1) نختار مفردة البداية عشوائيا ولتكن المفردة رقم8 هي المفردة المختارة

2) نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة:

$$\text{مقدار الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{400}{200} = 20$$

3) نبدأ بكتابة أرقام العينة بحيث نضيف مقدار الزيادة على مفردة البداية وما تبعها من مفردات.

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، ......،388

ج) العينة الطبقية:- نستخدم هذا النوع عندما يكون المجتمع مقسم إلى طبقات ولاختيار عينة بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:-

- نحدد حجم المجتمع الكبير وليكن(ن)
- نحدد حجم كل طبقة وليكن $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$ ...$ن_ر$

بحيث ان: $ن_1 + ن_2 + ... + ن_ر = ن$

- نحدد حجم العينة الكلي وليكن م.
- نحدد حجم العينة الطبقية وليكن $م_1$، $م_2$، $م_3$، ...، $م_ر$
- نجد $م_1$، $م_2$، ...$م_ر$، من العلاقة التالية:

$$م_1 = \frac{ن_1}{ن} \times م$$

$$م_2 = \frac{ن_2}{ن} \times م$$

$$\vdots$$

$$م_ر = \frac{ن_ر}{ن} \times م$$

مثال: مجتمع 10000 مفردة مكن من 4 طبقات حجم كل طبقة على التوالي، 1000، 3500، 4000، 1500، يراد سحب عينة حجمها 400 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك بحيث تمثل هذه العينة المجتمع تمثيلا سليما؟

الحل : من المعطيات ن=10000، $ن_1=1000$ $ن_2=3500$

$ن_3=4000$ ، $ن_4=1500$ م = 400

ثم نبدأ بتحديد حجم كل عينة جزئية باستخدام العلاقة اعلاه

$$م_1 = \frac{ن_1}{ن} \times م = \frac{1000}{10000} \times 400 = 40$$

$$م_2 = \frac{ن_2}{ن} \times م = \frac{3500}{10000} \times 400 = 140$$

$$م_3 = \frac{ن_3}{ن} \times م = \frac{4000}{10000} \times 400 = 160$$

$$م_4 = \frac{ن_4}{ن} \times م = \frac{1000}{10000} \times 400 = 60$$

$$م = 40 + 140 + 160 + 60 = 400$$

د- العينة متعددة المراحل: عندما يتعذر استخدام الطرق السالفة الذكر لاختيار عينة مجتمع ما فاننا نلجأ لأسلوب العينة متعددة المراحل وسنقوم بتوضيح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:-

مثال: يراد قياس المستوى التحصيلي في كلية مجتمع بطريقة العينة متعددة المراحل كيف يتم ذلك؟

الحل: من المعلوم ان الكلية تشمل على عدة تخصصات، نقوم باختيار تخصص ما عشوائياً كمرحلة اولى.

- كل تخصص به عدة شعب، نقوم باختيار احدى هذه الشعب عشوائيا. وهذه هي المرحلة الثانية.

- نختار عينة حسب الحجم المطلوب عشوائيا من هذه الشعبة وهي المرحلة الثالثة.

1-5) مصادر الخطأ في العينات

نلاحظ أن النتائج التي نحصل عليها من العينة لاتكون مطابقة تماما للنتائج التي نحصل عليها من المسح الشامل، والسبب في ذلك ان نتائج العينة تتعرض لنوعين من الاخطاء.

أ) خطأ الصدفة ب) خطأ التحيز

أ) خطأ الصدفة (الخطأ العشوائي)

يرجع سبب هذا الخطأ إلى طريقة الاختيار العشوائي لمفردات العينة فتأتي العينة مختلفة عن نتائج لمجتمع ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:-

يوجد لدينا اربعة طلاب ط$_1$، ط$_2$، ط$_3$، ط$_4$، وكانت علاماتهم في مادة الاحصاء من (20) على التوالي 10، 14، 16، 20، فان الوسط الحسابي لعلاماتهم هو:-

$$\text{الوسط الحسابي للمجتمع} = \frac{20 + 16 + 14 + 10}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

فاذا سحبنا عينة عشوائية مكونة من ثلاثة طلاب فانها تكون احدى المجموعات حيث لايمكن سحب هذه العينة الا باحدى الطرق الاربعة للعينات الاربعة:

$$\text{العينة الأولى} = \frac{16 + 14 + 10}{3} = \frac{40}{3} = 13.33$$

$$\text{العينة الثانية} = \frac{20 + 14 + 10}{3} = \frac{44}{3} = 14.67$$

$$\text{العينة الثالثة} = \frac{20 + 16 + 10}{3} = \frac{46}{3} = 15.33$$

$$\text{العينة الرابعة} = \frac{20 + 16 + 14}{3} = \frac{50}{3} = 16.67$$

وبهذا نجد ان الوسط الحسابي للعينة الاولى والثانية يقل عن الوسط الحسابي للمجتمع ويزيد الوسط الحسابي للعينة الثالثة والرابعة عن الوسط الحسابي للمجتمع ويرجع السبب في ذلك الى الاختيار العشوائي لمفردات العينة.

⇐ وخطأ الصدفة يتوقف على ثلاث عوامل رئيسية.

1) حجم العينة، فكلما كان حجم العينة كبيرا كلما قل خطأ الصدفة والعكس بالعكس.

2) تباين مفردات المجتمع، فكلما كان التباين كبيرا كان وقوع خطأ الصدفة كبيرا.

3) كلما كان الاختيار العشوائي لمفردات العينة سليما كلما امكن التقليل من امكانية الخطأ.

ب) خطأ التحيز

يحدث خطأ التحيز نتيجة لزيادة المعلومات أو نقص فيها، والخطورة في هذا الخطأ تكمن في عدم القدرة على حصره ويتعرض له المسح الشامل كما تعرض له

العينة ومن الاسباب التي تؤدي الى وجوده في المسح الشامل مايلي:

- اجابات خاطئة يتسبب فيها جامع البيانات/نتيجة لعدم كفاءته او تحيزه لرأيه اوتأثيره على الشخص المبحوث لاعطاء اجابة معينة او لعدم وجود الثقة بين الباحث والشخص المبحوث لاختلاف في الجنس أو اللون او الظروف الاجتماعية، وهي امور جميعها تؤدي الى عدم الدقة في البيانات.
- اخطاء غير متعمدة من قبل معطي البيانات نتيجة لعدم فهمه بعض الاسئلة الموجودة في الاستمارة الاحصائية.
- اخطاء عمدية في الاجابة من قبل معطي البيانات عندما يشعر بأن الاسئلة التي تطرح عليه هي اسئلة شخصية تحرجه اجتماعيا وقانونيا.
- عدم جمع البيانات عن بعض افراد المجتمع او جمع البيانات عن بعض افراد المجتمع من مرة.

وتتعرض العينات لخطأ التحيز لنفس الاسباب التي يتعرض لها المسح الشامل اضافة للاسباب الآتية:-

- في حالة عدم التمكن من الوصول الى بعض مفردات العينة يستعاض عن هذه المفردات بمفردات اخرى مما يؤدي إلى التحيز.
- عدم وجود اطار سليم عند سحب العينة وقد يكون هذا الاطار قديماً وتنقصه بعض مفردات المجتمع وهذا يؤدي الى تحيز العينة للمفردات الموجودة، أو قد يكون في الاطار بعض المفردات المتكررة مما يؤدي الى تحيز العينة الى هذه المفردات.

تعريف: "الاطار هو حصر شامل لجميع مفردات المجتمع المراد بحثه وقد يكون قائمة بالمفردات".

1- 6) تبويب وتصنيف البيانات

بعد جمع الاستمارات الاحصائية نقوم بتدقيق هذه الاستمارات من اجل الوصول الى الاستمارات التي يوجد بها معلومات خاطئة او ناقصة ثم نقوم بارجاعها الى الميدان لتصحيحها او الغاؤها في حالة عدم التصحيح.

الا ان وجود مجموعة كبيرة من الحقائق غير المنظمة في الاستمارات الاحصائية يجعل الباحث عاجزا عن تحليل هذه البيانات حتى يسهل دراستها والاستفادة منها.

تعريف: تصنيف البيانات أي تقسيمها الى مجموعات متجانسة وتفريعها في جداول تلخيصية، ويعتمد هذا التقسيم على طبيعة البيانات وهدف البحث.

تعريف: " التبويب هو وضع البيانات الاحصائية في شكل جداول تمكن من عرضها بصورة تلخص معالمها وتساعد على استخلاص النتائج منها. ويتم تبويب البيانات عادة على اساس تقويم زمني او جغرافي او نوعي او كمي او على اساس خليط من هذه الاسس المختلفة للتقسيم".

ويمكن توضيح ما سبق عن طريق الامثلة التالية:

اعداد الخريجين في كلية ما خلال السنوات 80-83	
السنة	اعداد الخريجين
1980	400
1981	700
1982	900
1983	1000

جدول رقم (1)

اعداد خريجي كليات المجتمع عام 82 حسب المحافظات	
المحافظة	عدد الخريجين
امانة العاصمة	1000
محافظة اربد	300
محافظة الكرك	150
محافظة البلقاء	100

جدول رقم (2)

اعداد الخريجين في كلية ما عام 82 موزعين حسب الجنس	
الخريجون	اعدادهم
طلاب	400
طالبات	400

جدول رقم (3)

اعداد الخريجين في اكبر 4 كليات عام	
الكلية	اعدادهم
الكلية أ	1000
الكلية أ	1000
الكلية جـ	600
الكلية د	500

جدول رقم (4)

نلاحظ ان:

الجدول رقم(1) يعرض اعداد الخريجين لكل سنة على حدة أي ان التبويب زمني.

الجدول رقم(2) يعرض اعداد الخريجين لكل محافظة اذا فالتبويب جغرافي

الجدول رقم(3) يعرض اعداد الخريجين حسب الجنس اذا فالتبويب على اساس نوعي

الجدول رقم(4) يعرض اعداد الخريجين حسب احجام الكليات فالتبويب كمي.

1-7) تفريغ البيانات الاحصائية

بعد الانتهاء من جمع البيانات سواء كانت البيانات ميدانية ام تاريخية يقوم الباحث بالعملية التالية وهي: عملية تفريغ البيانات، فاذا كان حجم البيانات صغيرا يتم تفريغها يدويا على جداول معدة لهذا الغرض اما اذا كان حجم البيانات كبيرا فيمكن الاستعانة بالآلات التي تعتمد على نظام البطاقات المثقبة سابقا والاقراص الممغنطة والاشرطة حاليا وهذا لايتم الا عن طريق الترميز للبيانا الوصفية حتى لا تأخذ حيزا كبيرا سواء على البطاقات المثقبة او الاقراص حتى تحفظ في الاجهزة الالكترونية والحاسبات الالكترونية لحين الطلب.

1-7-1) التوزيعات التكرارية

تعريف: التوزيع الكراري هو عبارة عن توزيع البيانات المأخوذة عن ظاهرة معينة على الفئات بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط والمفردات التي تقع في فئة واحدة تكون متجانسبة. ثم نقوم بعد المفردات التي تقع في الفئة ونضعها في جدول يسمى بالجدول التكراري.

اما اذا كان مدى البيانات صغيرا فانه يمكننا بناء الجدول التكراري بترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا حتى تصل الى اعلى قيمة وهذا يمثل العمود الاول، اما العمود الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت بها كل مفردة.

مثال: البيانات التالية تمثل الاجور اليومية لخمسة عشر عاملا بالدينار الاردني مصنفة بالجدول التالي .

الاجور اليومية	عدد العمال
3	2
3.5	2
4	2
5	3
5.5	1
6	3
المجموع	15

جدول(1-5)

وأما اذا كان المدى كبيرا وحجم البيانات ايضا كبيرا فلا بد من تقسيم قيم البيانات الى فئات ذات اطوال متساوية او غير متساوية وتفرغ البيانات على هذه الفئات وهذا مايسمى بالتوزيع التكراري الفئوي ونقوم باتباع الخطوات التالية في انشائه:

1) نحدد اعلى قيمة للمشاهدات وادنى قيمة للمشاهدات.

2) نجد مدى هذه البيانات من العلاقة.

المدى المطلق = اعلى قيمة مشاهدة-ادنى قيمة+1 (للدقة)

3) نحدد عدد الفئات وهذا يكون عادة حسب رغبة الباحث ولكن بشكل عام فان العدد يتراوح 5 ≥ عدد الفئات ≥ 10 . الا ان بعض الباحثين يرى ان تكون بين 5 ≥ عدد الفئات ≥ 15 الا ان هذا فيه جهد كبير للباحث.

4) يحدد طول الفئة وذلك من العلاقة:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}}$$

ويستحسن ان يكون طول الفئة خال من الكسور لتسهيل العمليات الحسابية. وعند ظهور مثل هذه الكسور فلا بد من التخلص منها عن طريق تقريبها الى اعلى وهذا بدوره يؤدي الى نقص في عدد الفئات او مطابقة للفئات المفترضة.

5) نعين الحد الادنى للفئة الاولى وهو اصغر قيمة مشاهدة.

6) نحدد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى=الحد الادنى للفئة الاولى- $\frac{1}{2}$ وحدة دقة

7) نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الاعلى الفعلي للفئة الأولى = الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى+طول الفئة

او نحدد الحد الاعلى للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الاعلى للفئة الاولى= الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى + $\frac{1}{2}$وحدة دقة

8) نجد الحدود الفعلية الدنيا والعليا وكذلك الحدود الدنيا والحدود العليا لباقي الفئات من العلاقات التالية:-

الحد الادنى للفئة اللاحقة= الحد الادنى للفئة السابقة+ طول الفئة

الحد الادنى الفعلى للفئة اللاحقة= الحد الادنى الفعلي للفئة السابقة+ طول الفئة

الحد الاعلى الفعلي للفئة اللاحقة =الحد الاعلى الفعلي للفئة السابقة+ طول الفئة

9) نحدد مراكز الفئات وذلك من خلال ايجاد مركز الفئة الاولى من العلاقة:

$$\text{مركز الفئة الاولى} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة الاولى + الحد الأعلى للفئة الاولى}}{2}$$

$$= \frac{\text{لحد الادنى الفعلي للفئة الاولى+الحد الاعلى للفئة الاولى}}{2}$$

10) نجد مراكز الفئات اللاحقة من العلاقة:

مركز الفئة اللاحقة=مركز الفئة السابقة+طول الفئة

11) نفرغ البيانات على الفئات باستخدام الخطوط الرأسية لكل تكرار وخط افقي للتكرار الخامس ونستمر في التفريغ حتى نهاية آخر مشاهدة.

12) نسجل مجموع التكرارات عدديا امام كل فئة لتمثل بعمود التكرارات.

13) نجمع التكرارت لنقارنها بمجموع المشاهدات حيث يجب التطابق.

مثال: البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لخمسين موظف في احدى الشركات الصناعية.

57، 43، 46، 24، 44، 38، 19، 54، 49، 57، 29، 53، 45، 47، 41، 37، 49، 56، 47، 29، 31، 32، 51، 52، 42، 45، 28، 43، 49، 34، 24، 42، 28، 39، 21، 18، 37، 34، 29، 23، 35، 43، 39، 41، 26، 27، 32، 37، 28.

المطلوب: انشاء جدول تكراري يمثل جميع ما ورد سابقا.

الحل: نبدأ باتباع الخطوات السابقة.

- نجد المدى المطلق= اكبر قيمة- اصغر قيمة+ 1=57-18+1=40
- ليكن عدد الفئات 6.
- نجد طول الفئة من العلاقة.

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{40}{6} = 6.66 \approx 7$$

- نعين الحد الادنى للفئة الاولى وليكن اصغر قيمة وهو18.
- نعين الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى=18-0ر5=17ر5.
- نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى= 17ر5+ طول الفئة= 17ر5+7=24ر5
- نعين الحد الاعلى للفئة الاولى= 24ر5-0ر5=24.

بهذا نكون قد حصلنا على الحدود العليا والدنيا وهي [18، 24] والحدود الفعلية الدنيا والعليا للفئة الأولى وهي [17ر5 و 24ر5]. وباضافة العدد 7 وهو طول الفئة لكل من الحدود الدنيا والعليا السابقة نحصل على الحدود الدنيا والعليا للفئات اللاحقة.

- نعين مركز الفئة الاولى= $\frac{24+18}{2} = 21$ نضيف طول الفئة الى مركز الفئة السابقة لنحصل على مراكز الفئات اللاحقة.
- نفرغ البيانات المعطاة على الفئات التي انشأناها سابقا وذلك بوضع خطوط رأسية وخط مائل للقراءة الخامسة.
- نجمع التكرارات المناسبة في عمود الخطوط ونضع المجموع في عمود التكرارات.

- نتأكد من مطابقة عدد المشاهدات مع مجموع التكرارات.

نلخص كل الخطوات السالفة الذكر في الجدول التالي:

حدود الفئة (1)	الحدود الفعلية للفئة (2)	مركز الفئة (3)	الاشارات (4)	التكرار
24–18	24.5–17.5	21	~~////~~ /	6
31–25	31.5–24.5	28	~~////~~ ////	9
38–32	38.5–31.5	35	~~////~~ ~~////~~	10
45 – 39	45.5 – 38.5	42	~~////~~ ~~////~~ //	12
52–46	52.5–45.5	49	~~////~~ ///	8
59–53	59.5–52.5	56	~~////~~	5

وطالما اننا بصدد التكرارات فلارد من التنويه الى التكرار النسب والتكرار المئوي وعليه فيكون التكرار لنسبي لكل فئة هو.

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

$$\text{التكرار المئوي للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}} \times 100 \%$$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي:

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبينة بالجدول (1-7)

فئات الاجور	34–30	39–35	44–40	49–45	54–50	المجموع
التكرار	5	10	20	25	40	100

جدول (1 –7)

المطلوب: تكوين جدول التكرار النسبي والتكرار المئوي لهذه البيانات .

الحل: الجدول المطلوب هو جدول (1-8)

الفئات	التكرار $ك_ر$	التكرار النسبي	التكرار المئوي
34-30	5	$\frac{5}{100}$	%5
39-35	10	$\frac{10}{100}$	%10
44-40	20	$\frac{20}{100}$	%20
49-45	25	$\frac{25}{100}$	%25
54-50	40	$\frac{40}{100}$	%40
المجموع	100	$1 = \frac{20}{20}$	%100

جدول(1-8)

نلاحظ ان $\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر = \%100$

1-7-2 التوزيع التكراري المتجمع

في بعض الاحيان نحتاج الى معرفة عدد المفردات التي تساوي او تزيد عن قيمة معينة تساوي او تقل عن قيمة معينة وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات لابد من تكوين جدول تكراري متجمع وهو يبين التكرارت المتجمعة لاكثر من فئة وهو نوعان:

أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

خطوات انشاء الجدول

- نضيف فئة سابقة وتكرارها صفر
- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
- نحدث عمودا جديدا يحوي نهاية الفئات.
- نقوم بتجميع التكرارات من اعلى الى اسفل.

مثال: الجدول التالي يمثل الأجور لخمسة عشر عاملاً كما هو مبين في جدول (1-9)

فئات الأجور	5- 3	8-6	11-9	14-12	17-15
عدد العمال	0	2	3	4	6

جدول (1-9)

المطلوب: تكوين جدول متجمع صاعد.

الحل: نكون جدول الحل (1-10)

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
5-3	صفر	5.5-2.5	اقل من 5.5	صفر
8-6	2	8.5-5.5	اقل من 8.5	2
11-9	3	11.5-8.5	اقل من 11.5	5
14-12	4	14.5-11.5	اقل من 14.5	9
17-15	6	17.5-14.5	اقل من 17.5	15
المجموع	15			

جدول (1-10)

نلاحظ على الجدول ما يلي:

1- التكرار الصاعد المناظر للفئة الأولى يساوي تكرار الفئة الأولى.

2- التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفئة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات كلها.

ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

خطوات انشاء الجدول:

1- نضيف فئة لاحقة وتكرارها صفر.

2- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.

3- نحدث عمودا جديدا يحوي على بداية الفئات.

4- نقوم بتجميع التكرارات من أسفل الى اعلى

والان نطبق هذه الخطوات على المثال السابق ليظهر في جدول (1-11).

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
8-6	2	8.5-5.5	اكثر من 5.5	15
11-9	3	11.5-8.5	اكثر من 8.5	13
14-12	4	14.5-11.5	اكثر من 11.5	10
17-15	6	17.5-14.5	اكثر من 14.5	6
20-18	صفر	19.5-17.5	اكثر من 17.5	صفر

جدول (1 – 11)

ونلاحظ على الجدول ما يلي:-

1- ان التكرار المتجمع الهابط للفئة الأولى يساوي مجموع التكرارات.

2- ان التكرار المتجمع الهابط المناظر للفئة الأخيرة يساوي تكرار الفئة الأخيرة كما ونستطيع ان نعرف من الجدول ان عدد الذين تزيد اجورهم مثلا عن 5ر8 دينار هو 13 موظفا وعدد الذين تزيد أجورهم عن 5ر11 دينار هو 10 موظفين

أما بالنسبة لجدول التكرار المتجمع الصاعد فاننا نستطيع ايجاد عدد الذين تقل اجورهم مثلا عن5ر8دينار وهم موظفان او من تقل رواتبهم عن 5ر14 دينار (9 موظفين).

وفي نهاية التوزيعات التكرارية لابد من القاء الضوء على بعض النقاط الهامة التي فاتنا ذكرها.

1-7-3) الجداول المقفلة والمفتوحة :

تعريف: الجدول المقفل هو الجدول الذي تكون فيه الفئة الاولى والفئة الاخيرة محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الادنى فهو الجدول الذي تكون فيه بداية الفئة الاولى غير محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الاعلى فهو الجدول الذي تكون نهاية الفئة الاخيرة غير محدودة. اما اذا كانت بداية الفئة الاولى غير محددة ونهاية الفئة الأخيرة غير محددة فيكون الجدول مفتوحا من كلا طرفيه ويمكن التوضيح بالمثال التالي:-

جدول رقم (1-12)	جدول رقم (1-13)	جدول رقم (1-14)	جدول رقم (1-15)
اقل من 3		اقل من 3	
6-3	6-3	6-3	6-3
10-7	10-7	10-7	10-7
14-11	14-11	14-11	14-11
	اكبر من 14	اكبر من 14	
مفتوح من طرفه الادنى	مفتوح من طرفه الاعلي	مفتوح من كلا طرفيه	جدول مقفل

وكلما كان الجدول مقفلا كلما كانت العمليات الحسابية اسهل.

4-7-1) الجداول المنتظمة وغير المنتظمة:

تعريف: الجدول المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات متساوية.

تعريف: الجدول غير المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات غير متساوية.

- في حالة انشاء جدول تكراري فان الباحث يقوم بافتراض عدد الفئات لانه لايوجد قاعدة عامة يعتمد عليها في تحديد عددها الا انه يجب مراعاة الاعتبارات التالية عند تحديد عدد الفئات:

1) حجم البيانات وتباينها وتجانسها

2) النتيجة التي يريد الباحث الوصول عليها أن تكون دقيقة او تقريبية.

تعريف: الفئة عبارة عن مجموعة جزئية محددة بحدين الاصغر. ويسمى الحد الادنى والاكبر ويسمى الحد الاعلى والمفردات الموجودة في الفئة متقاربة ويفضل ان تكون اطوال الفئات متساوية لكي تسهل العمليات الحسابية.

- **تعين حدود الفئات**: عند تعيين حدود الفئات التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار عدم تداخل هذه الحدود وهذا يعتمد على معرفتنا لنوعين من البيانات هما:-

1) البيانات المأخوذة عن ظاهرة منفصلة وتأخذ قيما صحيحة مثل اعداد السيارات، البيوت، الطلاب، الطائرات...الخ.

فلو كانت البيانات المتوفرة لدينا عن اعداد الطائرات الهابطة في مطار عمان الدولي ولمدة مئة يوم ولو فرضنا ان اقل يوم هبطت في المطار بـ 20 طائرة واكثر يوم هبطت فيه 43 طائرة. نلاحظ بأن هذه الظاهرة هي ظاهرة منفصلة (وثابة) والبيانات المأخوذة عنها اعداد صحيحة ولو فرضنا ان طول الفئة يساوي(5) وحدات فان افضل شكل لكتابة هذه الفئات هي الفئات التي يوجد بها ثغرة مقدارها واحد صحيح يبين الحد الاعلى للفئة والحد الادنى للفئة التي تليها وتكون بالصورة التالية:-

20-24، 25-29، 30-34، 35-39، 40-44 ونلاحظ انه يوجد ثغرة

مقدارها واحد صحيح بين 24،25،29،30، 34،35...الخ وهذه الفئات غير متداخلة.

ونتعامل مع هذه الفئات بالحدود الفعلية لها فان الحدود الفعلية للفئة الاولى 19.5 – 24.5 ....الخ ويمكن استخراج طول الفئة لهذا النوع من الفئات عن طريق العلاقة التالية:

طول الفئة=الحد الاعلى الفعلي – الحد الادنى الفعلي

2) البيانات المأخوذة عن ظاهرة متصلة(مستمرة) وتأخذ قيما كسرية مثل البيانات عن الاطوال، الاوزان، الاحجام، المسافات....الخ. فلو فرضنا ان لدينا بيانات عن اوزان50رجلا(ظاهرة متصلة) وكان اقل مشاهدة هي 55 كغم واكبر مشاهدة 70 كغم ان البيانات في هذه الحالة نأخذ قيما كسرية وافضل طريقة لكتابة الفئات هي ان تبدأ الفئة بنفس القيمة التي تنتهي فيها الفئة السابقة ولوكان طول الفئة4 وحدات فان الفئات تكتب بالصورة التالية:

الفئات
55 وأقل من 59
59 وأقل من 63
63 واقل من 67
67 واقل من 71

ان هذه الفئات غير متداخلة ولا يوجد بينها ثغرات فالفئة الاولى تعني ان جميع الذين تقع اوزانهم بين 55 كغم واقل من59 كغم تقع ضمن الفئة الاولى اما الرقم(59) فيقع في الفئة الثانية وهكذا.

الفئات غير المتساوية: في حالة بروز فئات غير متساوية في بعض الجداول التكرارية فاننا نلجأ لحساب التكرار المعدل والذي يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

$$\text{تكرار الفئة المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة الأصلية}}{\text{طول الفئة}}$$

بإعطاء المثال التالي.

مثال : الجدول (1−16) يمثل توزيع القوى العاملة في الأردن حسب السن (بالالف) لسنة 1970 والمطلوب عمل تكرار معدل لعمود التكرارات .

العمر	-10	-15	-20	-25	-30	-40	-50	-60	65 فما فوق
عدد العمال	10	70	106	89	133	79	45	14	15

جدول(1−16)

الحل : نلاحظ من الجدول أعلاه أن الفئات غير متساوية لذا نقوم بعمل جدول التكرار المعدل والمبين في جدول (1 − 17):

فئات العمر	عدد العمال	التكرار المعدل
-10	10	$2=\frac{10}{5}$
-15	70	$14=\frac{70}{5}$
-20	106	$21.6=\frac{106}{5}$
-25	89	$17.8=\frac{89}{5}$
-30	133	$13.3=\frac{133}{10}$
-40	79	$13.3=\frac{133}{10}$
-50	45	$7.9=\frac{79}{10}$
-50	45	$4.5=\frac{45}{10}$
-60	14	$2.8=\frac{14}{5}$
65 فما فوق	15	$3=\frac{15}{5}$

مثال : البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان 30 طالباً مبينة بالجدول (1-18)

الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن
160	53	171	68	169	68	170	68	150	51	160	55
165	54	178	74	167	70	179	75	175	53	171	65
162	60	177	69	171	65	184	80	168	62	175	69
167	58	179	77	155	50	172	61	159	75	181	54

جدول(1-18)

المطلوب:

1) تكوين جدول تكراري مزدوج لهذه البيانات
2) عدد الطلاب الذين اوزانهم تتراوح بين 55 وتقل عن 70
3) عدد الطلاب الذين اوزانهم 60 فما فوق واطوالهم 160 سم فما فوق
4) عدد الطلاب الذين اطوالهم 165 فما فوق
5) أوجد التوزيع الهامشي لقيم س والتوزيع الهامشي لقيم ص.

الحل: 1) نبدأ أولا بتكوين الجدول التكراري المزدوج في جدول(1-19)

فئات الأوزان ص / س فئات الأطوال	50-	55-	60-	65-	70-	75-	85-80	المجموع
155-	//					/		3
160-	/	/	//					4
165-	/	/	///	/	/			7
170-			/	////	/	/		7
175-	/			//	/	//		6
185-180	/						//	3
المجموع	6	2	6	7	3	4	2	30

جدول(1-19)

2) عدد الطلاب= 2+6+7=15

3) عدد الطلاب=21

4)عدد الطلاب= 7+7+6+3=23

5) التوزيع الهامشي لقيم س كما في جدول(1-20)

الأطوال	التكرار
155-	3
160-	4
165-	7
170-	7
175 -	6
180 - 185	3
	30

جدول (1 -20)

والتوزيع الهامشي لقيم ص كما في الجدول (1 - 21)

الوصف	التكرار
50-	6
55-	2
60-	6
65-	7
70-	3
80-85	2
	3

جدول(1-21)

مثال: أكتب التكرار المعدل للجدول التكراري في (1-22):

الفئات	التكرار	التكرار المعدل
150-	15	$3 = \frac{15}{5}$
155-	50	$5 = \frac{50}{10}$
165-	50	$2.5 = \frac{50}{20}$
185-195	30	$3 = \frac{30}{10}$

جدول(1-22)

مع ملاحظة أنه لايجاد التكرار المعدل نجده من العلاقة التالية:

$$\text{التكرار المعدل للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

ملاحظة : التكرار المعدل لا يوجد الا للحالات التي تكون فيها الفئات غير منتظمة ونادراً ما يستعمل عندما تكون الفئات متساوية

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الأجور الخمسين عاملاً مبينة بالجدول (1-23):

فئات الأجور	التكرار
40-	8
60-	12
80-	20
100-	6
120-140	4
المجموع	50

جدول (1-23)

المطلوب: 1) ايجاد عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 80 دينار.

2) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 55 دينار.

3) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً يزيد عن90 دينار.

4) نسبة العمال الذين يتقاضون اجرا بين 55-90.

5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار.

6) ايجاد قيمة الاجر الذي يستحق صاحبه الدعم والاجر الا على الذي يستحق صاحبه المكافأة اذا اتفق على ان تكون النسبة الاولى 8٪ من العمال والنسبة التالية12٪ من العمال.

الحل: 1) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 80=8+12=20 عاملا.

2) طول الفترة=60-40=20، 55-40=15 الفرق في الراتب

والآن نقوم بعمل نسبة وتناسب

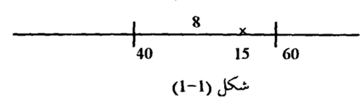
8 ← 20

س ← 15 ⇐

$$\frac{8}{س} = \frac{20}{15}$$

وبالضرب التبادلي فإن: 20س = 120 ∴ س = $\frac{120}{20}$ = 6

∴ عدد العمال = 6 عمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.



شكل (1-1)

3) 100-80=20 طول الفئة

90-80=10

20 ← 20

10 ← س ⇐ $\frac{20}{10} = \frac{20}{س}$ ⇐ 20 س = 20

∴ س = $\frac{200}{20}$ = 10

التكرار	4	6	10	
الفئة	140	120	100	90

شكل (1-2)

مجموع العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 دينار= 10+6+4=20 عامل

نسبة العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 = $\frac{20}{50}$ × 100٪ = 40٪

4) عدد العمال الذين تقع رواتبهم بين55،90=2+12+10=24 عامل

6 عمال	2	12	10	10
40	55	60	80	90	100

شكل (1-3)

نسبة العمال الذين رواتبهم بين(55-90)

= $\frac{24}{50}$ × 100٪ = 48٪

5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار=10+12+8=30 عاملا

8	12	10	10
40	60	80	90	100

شكل (1-4)

النسبة = $\frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$

6) النسبة الأولى= $\frac{80}{100} \times 50 = 4$ عمال

20 ← 8

س ← 4 ⇐ $\frac{20}{س} = \frac{8}{4}$ ⇐ 8 س = 80

∴ س = 10

الاجر الذي يستحق الدعم= 40 + 10 = 50

عدد الاشخاص الذين يستحقون المكافأة = $50 \times \frac{12}{100} = 6$.

1 – 8) عرض البيانات:

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

1 – 8 – 1) العرض الجدولي:

يكتسب العرض الجدولي اهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها:

- ان يكون للجدول عنواناً كاملاً مختصراً معبراً عما يحويه الجدول من بيانات.
- أن يضع عناوين بارزة لكل من الصفوف والأعمدة.
- أن يعطي لكل جدول رقم معين.

- أن تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- أن ترتب البيانات في الجدول حسب الأهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصادر المستقى منها البيانات.
- أن توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

أما هذه الفئات ومن اجل الاختصار فيمكن كتابتها بتحديد بداية الفئات وتترك نهايتها لتتحدد ضمنا من الفئة التالية لها وفي هذه الحالة تحدد نهاية الفئة الاخيرة كما في الجدول التالي:

الفئات المفتوحة:

55–

59–

63–

71–67

وللعلم ان هذا النموذج من الفئات يمكن استخدامه لبيانات كل من الظاهرتين المنفصلة والمتصلة.

ويمكن ايجاد طول الفئة من العلاقة التالية

طزل الفئة = الحد الأدني للفئة اللاحقة–الحد الأدنى للفئة السابقة.

= 59 –55=4

الجدول التكراري المزدوج:

مثال: الجدول التالي يمثل اعداد الطلبة في كلية الهندسة تخصصاتهم وسنواتهم الدراسية.

السنة \ التخصص	هندسة مدنية	هندسة معمارية	هندسة كيماوية	المجموع
الأولى	40	30	20	90
الثانية	50	40	15	105
الثالثة	60	20	25	105
الرابعة	50	60	60	170
المجموع	200	150	120	470

جدول (1 – 24)

*يتم قبول الطلبة في السنة الاولى بعد امتحان القبول

المصدر: وزارة التعليم العالي

1 – 8 – 2) العرض الهندسي للبيانات المنفصلة :

أ) الاعمدة او المستطيلات

ب) العرض بطريقة الصور

جـ) العرض بطريقة الدوائر

د) الخط البياني

أ- العرض بطريقة المستطيلات(او الاعمدة)

كثيرا ما نرى من خلال زياراتنا الى المؤسسات المختلفة هذا النوع من التمثيل مما يدل على انتشار هذه الطريقة بشكل واسع ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نرسم احداثين يلتقيان في نقطة الاصل. يمثل المحور الاول القيمة الوصفية والمحور الثاني القيمة العددية للقيمة المقابلة للقيمة الوصفية.
- اختيار مقياس رسم مناسب يتناسب مع حجم الورقة وحجم القيم العددية.
- رسم مستطيلات ذات قواعد متساوية وتتناسب اطوالها مع الاعداد التي يمثلها. وكذلك تكون متباعدة بعدا مناسبا.
- عند مقارنة ظاهرتين او اكثر تكون المستطيلات المقارنة متلاصقة.

مثال: البيانات التالية تمثل اعداد الطلبة في السنة الاولى والثانية والثالثة لطلبة كلية الاداب في جامعة ما حسب تخصصاتهم.

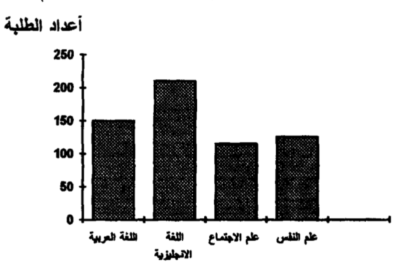
التخصص / السنة	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	علم الاجتماع	علم النفس	المجموع
الاولى	200	150	120	100	570
الثانية	150	210	115	125	600
الثالثة	80	120	80	70	350
المجموع	430	480	315	295	1520

جدول(1–25)

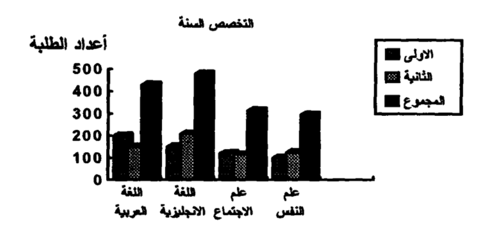
والمطلوب تمثيل هذه البيانات

1- بالمستطيلات لطلاب السنة الثانية حسب تخصصاتهم.

2- قارن بالاعمدة بين طلاب السنة الاولى والثانية حسب تخصصاتهم.



شكل (1–6)



شكل (1-7)

ب- العرض بطريقة الصور:

في هذه الطريقة تكــون الصــورة المعـبرة عـن البيانـات المـراد عرضهـا كوسـيلة ايضاحية تجـذب انتبـاه المشـاهد. مثـال علـى ذلـك: عنـد التعبـير عـن انتـاج شـركة مرسيلس للسيارات في سنوات مختلفة فكل صـورة لسـيارة تمثـل 1000 سـيارة فتضـع عدد من الصور بقدر انتاج الشركة لتلك السنة، وبدلا مـن صـورة سـيارة المرسـيلس سنضع العلامة التجارية لها.

مثال: البيانات التالية هي بيانات افتراضية تمثـل انتـاج احـد مصـانع شـركة المرسـيلس في منطقة بافاريا خلال السنوات 1983/1981 والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالصور.

السنة	كمية الانتاج	الصور (صورة واحدة لكل ألف سيارة)
1981	3000	
1982	4000	
1983	6000	

شكل (1-8)

جـ) العرض بطريقة الدوائر:

تعتبر هذه الطريقـة مـن افضـل الطـرق لتمثيـل البيانـات ذات الصفـة المشـتركة وتسطيع بواسـطتها ان تقـارن الاجـزاء بعضهـا البعـض ثـم الجـزء(القطـاع الدائـري) بالكل(الدائرة) ونتبع الخطوات التالية:-

1) نستخرج زاوية قطاع الدائرة من العلاقة التالية:-

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الجزء المحدد}}{\text{المجموع الكلي للأجزاء}} \times 360^{\circ}$$

حيث ان 360 هي الزاوية المركزية للدائرة.

2) نقوم برسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف قطر.

3) نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والممثلة بالقطاع.

مثال: بستان به 1080 شجرة مثمرة موزعة كما في الجدول التالي:-

نوع الشجر	العدد
تفاح	180
اجاص	540
عنب	90
دوراق	270
المجموع	1080

جدول (1 − 26)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

الحل: نجد زوايا القطاع لجميع اصناف الاشجار المثمرة

زاوية القطاع(للتفاح) $= \frac{180}{1080} \times 360^\circ = 60^\circ$

زاوية القطاع(للاجاص) $= \frac{540}{1080} \times 360^\circ = 180^\circ$

زاوية القطاع(عنب) $= \frac{90}{1080} \times 360^\circ = 30^\circ$

زاوية القطاع(دراق) $= \frac{270}{1080} \times 360^\circ = 90^\circ$

ومجموع هذه الزوايا يجب ان يساوي 360°



شكل (1 – 9)

د) التمثيل بالخط البياني:

وهو يوضح العلاقة بين ظاهرتين او اكثر بحيث تمثل على المحور الافقي المسميات او الزمن وعلى المحور الرأسي قيم الظاهرة مع اختيار مقياس رسم مناسب.

مثال: البيانات التالية تبين اعداد المواليد والوفيات في احدى البلدان خلال السنوات 1980/ 1984. مثل هذه البيانات بالخط البياني:

المواليد والوفيات بالآلاف

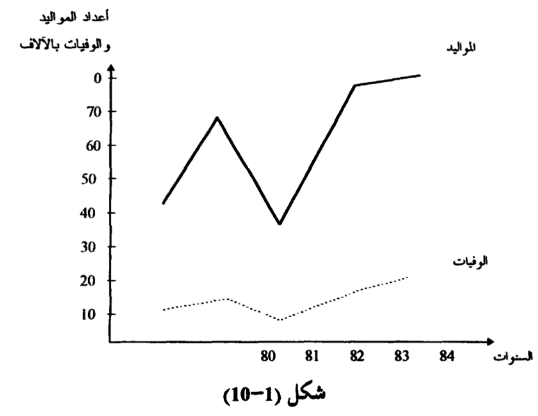
السنة	المواليد	الوفيات
1980	50	10
1981	70	12
1982	40	8
1983	80	14
1984	85	16

جدول(1−27)

الحل: 1) نرصد السنوات التي على المحور الافقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي.

2) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية السنوات والعمودية قيم الظاهرة.

3) نصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم او خطوط متقطعة.



شكل (1−10)

1 - 9) تمثيل الجداول التكرارية :

ويتم ذلك بأحد الأشكال التالية:-

أ- المدرج التكراري:

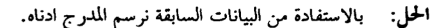
تعريف: المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة مقامه على محور الفئات، قواعدها اطوال الفئات وارتفاعاتها تكرار كل فئة وللحصول على هذا المدرج نتبع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين احدهما يمثل الفئات الفعلية في حالة الفئات المنفصلة والآخر يمثل التكرارات
- نرصد بداية الفئات الفعلية وعندما نصل الى نهاية اخر فئة نرصد حدها الاعلى.
- نقيم مستطيلات متلاصقة قواعدها الفئات الفعلية وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.

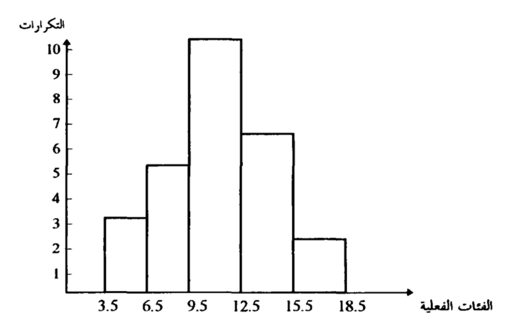
مثال : الجدول التكراري التالي بالمدرج التكراري

الفئات	التكرارات	الحدود الفعلية
6−4	3	6.5 − 3.5
9−7	5	9.5−6.5
12−10	10	12.5−9.5
15−13	6	15.5−12.5
18−16	2	18.5−15.5

جدول(1−28)



الحل: بالاستفادة من البيانات السابقة نرسم المدرج ادناه.



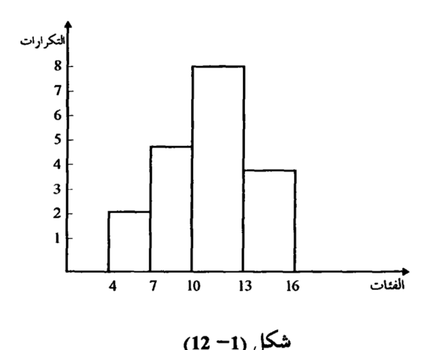
شكل (1− 11)

مثال: الجدول التكراري التالي بالمدرج التكراري.

التكرارات	الفئات
2	4 واقل من 7
5	7 واقل من 10
8	10واقل من 13
4	13 واقل من 16

جدول (1−29)

الحل: في هذا الجدول نستخدم الفئات المتصلة:



شكل (1− 12)

ب) المضلع التكراري:

يمكن رسم المضلع التكراري للجداول التكرارية بطريقتين.

1) عن طريق المدرج التكراري.

2) عن طريق مراكز الفئات.

1) عن طريق المدرج التكراري

في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :-

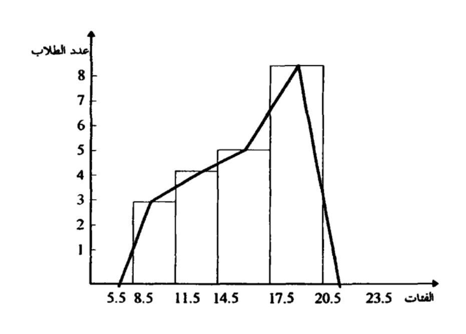
- اضافة فئة سابقة وفئة لاحقة وتكرار كل منهما صفر الى الجدول التكراري وذلك لاغلاق المضلع من كلا طرفيه على المحور الأفقي.
- رسم المدرج التكراري حسب الخطوات السابقة.
- ننصف قواعد المستطيلات العليا.
- نصل بين كل نقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم فيكون الشكل الناتج هو المضلع التكراري.

مثال: علامات 30 طالب من 20 موزعة كما في لجدول التكراري التالي والمطلوب رسم المضلع التكراري عن طريق المدرج التكراي.

فئات العلامات	عدد الطلاب	الفئات الفعلية
8-6	صفر	8.5 - 5.5
11-9	3	11.5-8.5
14-12	4	14.5-11.5
17-15	5	17.5-14.5
20-18	8	20.5-17.5
23-21	صفر	23.5-20.5

جدول (1-30)

الحل: من البيانات السابقة واتباع الخطوات نرسم الشكل (1 - 13)



شكل (1-13)

2) رسم المضلع عن طريق مراكز الفئات.

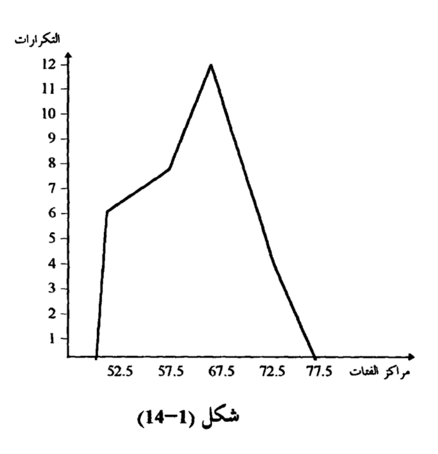
نقوم باتباع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين الافقي يمثل مراكز الفئات . والعمودي يمثل التكرارات
- نجد مركز الفئات .
- نعين النقاط على الرسم البياني حيث كل نقطة مسقطها الاول مركز الفئة والمسقط الثاني التكرار للفئة.
- نصل بين النقاط بشكل تتابعي.
- للحصول على مضلع تكراري مغلق نأخذ مركز فئة سابق بتكرار صفر ومركز فئة لاحق بتكرار صفر أيضاً.

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 30 طالبا مبوبة بالجدول التالي:-

فئات الاوزان	التكرار	مراكز الفئات
50-	صفر	52.5
55-	6	57.5
60-	8	62.5
65-	12	67.5
70-	4	72.5
75-80	صفر	77.5

جدول (1-31)



شكل (1-14)

ويجدر بنا ان نذكر انه في حالة رسم المضلع التكراري عن طريق المدرج التكراري فان المساحة التي يحصرها المضلع مساوية للمساحة التي يحصرها المدرج التكراري لان المضلع يحذف اجزاء من المدرج ويضيف له اجزاء وهذه أي المحذوفة والمضافة متساوية في المساحة.

جـ - المنحنى التكراري لرسم المنحنى التكراري نتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في رسم المضلع التكراري ولكن الفرق بينهما ان الوصل بين النقطة والنقطة التي تليها في المنحنى تكون بخطوط منحنية اما في المضلع بخطوط مستقيمة . وعادة يستخدم المنحنى في الحالات التي تكون فيها البيانات كبيرة الحجم وذات فئات اطوالها صغيرة والمتغير مستمر مثل الزمن، الاطوال، الاوزان... الخ.

د- تمثيل الجداول التكرارية المتجمعة بيانيا.

1- المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

2- المضلع التكراري المتجمع الهابط.

مثال: الأرباح السنوية بآلاف الدنانير ل 30 محلا من كبرى المحلات التجارية في مدينة موزعة كما يلي والمطلوب تمثيل هذا الجدول بالمضلع التكراي المتجمع الصاعد والهابط.

فئات الربح	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
24-10	صفر	14.5 - 9.5	اقل من 14.5	صفر
19-15	4	19.5-14.5	اقل من 19.5	4
24-20	6	24.5-19.5	اقل من 24.5	10
29-25	15	29.5 -24.5	أقل من 29.5	25
34-30	5	34.5-29.5	اقل من 34.5	30

جدول (1 – 32)

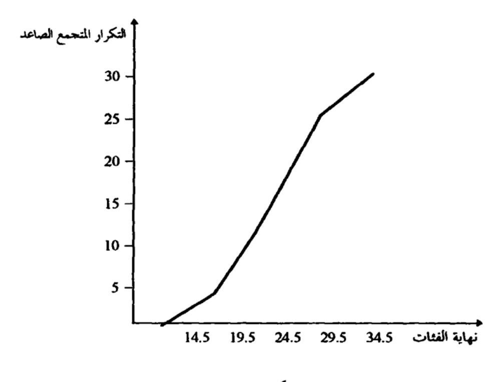
خطوات رسم مضلع تكراري متجمع صاعد

1- ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالجدول السابق.

2- نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي نهاية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد.

3- نرصد النقاط علىالرسم البياني والتي مساقطها الافقية نهاية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الصاعدة.

4- نوصل بخط مستقيم بين النقطة والنقطة التي تليها.



شكل (1-15)

أما المنحنى التكراري المتجمع الهابط فنتبع في رسمه نفس الخطوات التي اتبعت في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والفرق الوحيد هو ان نوصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط منحني بدلا من الخط المستقيم.

2) المنحنى التكراري المتجمع الهابط

لرسم المضلع نتبع الخطوات التالية:-

1) ننشئ جدول تكراري متجمع هابط (للتمرين السابق).

2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي بداية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط.

3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية بداية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الهابطة.

4) نصل منحني مستقيم بين النقاط المتتابعة.

فئات الربح	التكرارات	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
19–15	4	19.5–14.5	اكبر من 14.5	30
24–20	6	24.5–19.5	اكبر من 19.5	26
29–25	15	29.5–24.5	اكبر من 24.5	20
34–30	5	34.5–29.5	اكبر من 29.5	5
39–35	صفر	39.5–34.5	اكبر من 34.5	صفر

جدول (1–33)

1 – 10) عرض البيانات :

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

1) العرض الجدولي: يكتسب العرض الجدولي أهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها.

- ان يكون للجدول عنوان كامل مختصرا معبرا عما يحويه الجدول من بيانات.
- ان يعطي لكل جدول رقم معين.
- ان تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- ان ترتب البيانات في الجدول حسب الاهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصدر المستقى منه البيانات.
- ان توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

وسنتناول أمثلة أخرى مستخدمين الفئات المفتوحة والتي سيغلب استخدامها في هذا الكتاب.

مثال: الجدول التالي يمثل فئات الأجور لمائة عامل مبينة بالجدول التالي:

الفئات	70-	80-	90-	100-	120-110	المجموع
التكرار	8	22	40	25	5	100

المطلوب:1) أوجد مراكز الفئات لهذه الجدول.

2) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 80 أو تساويه.

3) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 100 أو تساويه.

4) أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90.

5) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.

6) أرسم المضلع التكراري لهذا التوزيع .

7) أرسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع.

8) أرسم منحنى التجمع الصاعد لهذا .

9) أرسم منحنى التجمع الصاعد لهذا التوزيع.

الحل: نكون جدول الحل التالي:

فئات الأجور	التكرار	مركز الفئة	فئات أقل من >	تكرار صاعد	فئات أكبر من ≤	تكرار هابط
70-	8	75	70>	صفر	70 ≤	100
80-	22	85	80 >	8	80 ≤	92
90-	40	95	90 >	30	90 ≤	70
100-	25	105	100 >	70	100 ≤	30
120-110	5	115	100 >	95	110 ≤	5
	100		120 >	100	120 ≤	0

جدول(1-34)

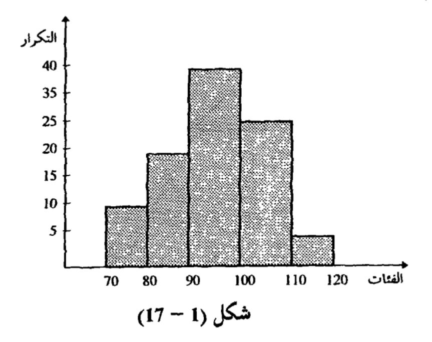
1) نجد مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الادنى للفئة التالية}}{2}$

2) عدد العمال= $22 + 40 + 25 + 5 = 92$

3) عدد العمال= 5 + 25 = 30

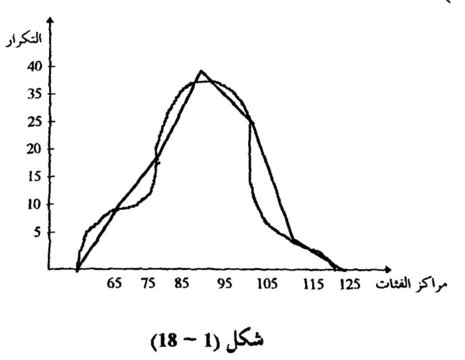
4) عدد العمال= 8 + 22 = 30

5)



شكل (1 – 17)

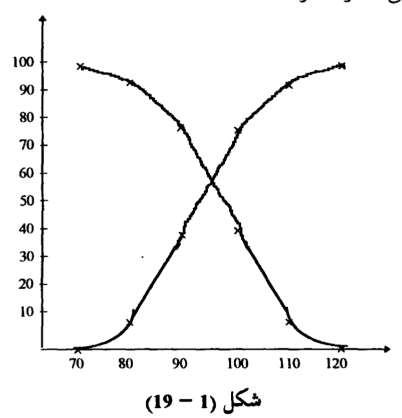
6 + 7)



شكل (1 – 18)

نستنتج من الرسم أن المضلع مفتوح ولجعله مغلقاً نأخذ فئة سابقة وفئة لاحقة بتكرار صفر ثم نصل مع النقاط الجديدة لكي يصبح المضلع مقفلاً.

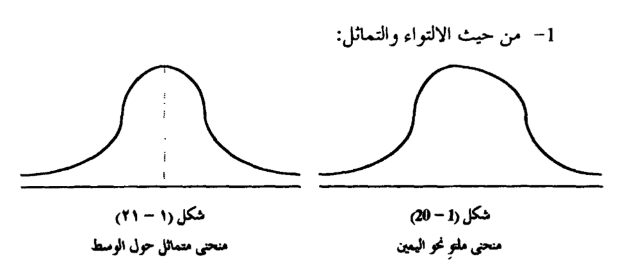
8 + 9) المنحنى المطلوب هو:



شكل (1 – 19)

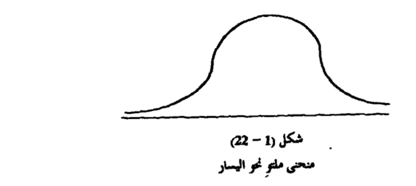
1 – 11) أنواع المنحنيات:

1- من حيث الالتواء والتماثل:



شكل (1 – 20)
منحنى ملتوٍ نحو اليمين

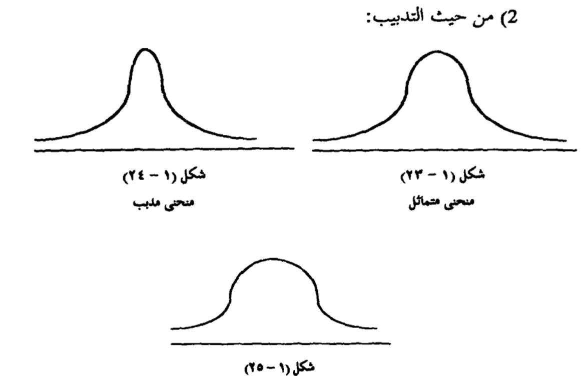
شكل (١ – ٢١)
منحنى متماثل حول الوسط



شكل (1 – 22)

منحنى ملتوٍ نحو اليسار

2) من حيث التدبيب:



شكل (١ – ٢٣)

منحنى متماثل

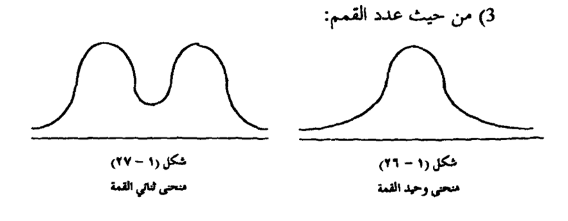
شكل (١ – ٢٤)

منحنى مدبب

شكل (١ – ٢٥)

منحنى مفرطح

3) من حيث عدد القمم:

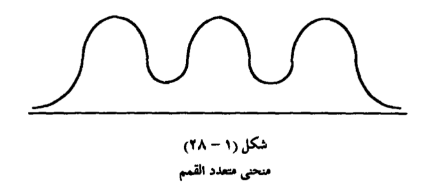


شكل (١ – ٢٦)

منحنى وحيد القمة

شكل (١ – ٢٧)

منحنى ثنائي القمة

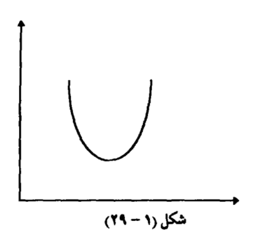


شكل (١ – ٢٨)
منحنى متعدد القمم

1 – 12) أشكال المنحنيات:

تتمثل أشكال المنحنيات بالأشكال والتسميات التالية:

1- الشكل النوني.



شكل (١ – ٢٩)

2- الشكل اللامي.



شكل (١ – ٣٠)

أمثلة إضافية:

مثال: في الجدول التكراري التالي توزيع 500 موظف حسب الأجر الشهري بالدينار، بناءاً على بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع العاملين في احدى الشركات. كما هو مبين في الجدول التالي:

الفئات	0–	100–	250–	500–1000
عدد العمال	200	150	125	25

جدول (1–35)

المطلوب:1) تسمية جدول تكراري غير منتظم.

2) ايجاد جدول التكرار المعدل.

3) رسم المضلع التكراري لجدول التكرار المعدل.

4) تسمية المنحنى الناتج من حيث التماثل.

5) حساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 75 دينار

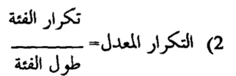
6) حساب نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 300 دينار

7) حساب نسبة العمال الذين تقع اجورهم بين 150 دينار، 300دينار.

الحل: 1– نكون جدول الحل التالي:

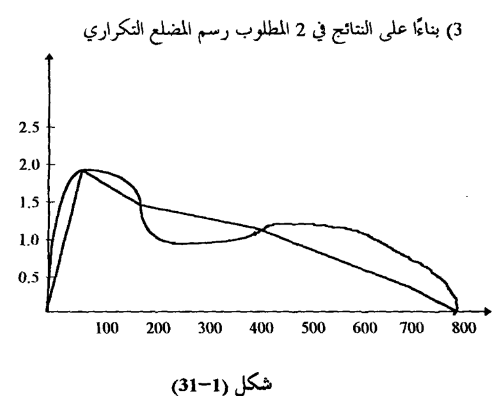
فئات الدخل	عدد العمال	التكرار المعدل $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$ك_ر × س_ر$	فئات أقل من	التكرار المعدل التجميعي
0–	200	2	50	100	100 >	2
100–	150	1	175	175	250>	3
250–	125	0.5	375	187.5	500>	3.50
500–1000	25	0.05	750	37.5	1000>	3.55
	500	3.55		500		

جدول (1–36)



2) $\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$

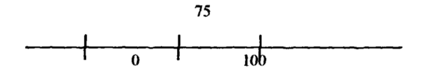
3) بناءًا على النتائج في 2 المطلوب رسم المضلع التكراري



شكل (1−31)

4) غير متماثل وانما نحو اليمن.

5) لحساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار: نجد عدد العمال ضمن الفترة المطلوبة كما هي موضح بالشكل:



شكل (1−32)

طول فئة التكرار:

100 ← 200

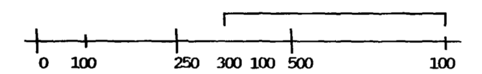
75 ← س $\frac{100}{75} = \frac{200}{س}$ وبالضرب التبادلي ←

∴ س = $\frac{200 \times 75}{100}$ = 150 موظف

نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 75= $\frac{150}{500}$ $\frac{3}{10}$

6) لحساب نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن (300) دينار.

نجد أولاً تكرار العمال ضمن هذه الفترة وذلك بالتمثيل على خط الأعداد والفترات.



شكل (1–33)

طول فئة التكرار:

250 ← 125

50 ← س ∴ س = $\frac{50 \quad 125}{250}$ = 25 موظف

تكرار الفئة المطلوبة= 100+25= 125

نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 300= $\frac{125}{500}$ $\frac{1}{4}$

7) لحساب نسبة الذين تتراوح اجورهم بين 150،300

نجد عدد العمال للفترة المطلوبة في شكل (1 - 34)

0 100 150 100 250 300 500

شكل (1-34)

طول فئة التكرار:

150 ← 150

50 ← س ∴ س = $\frac{125 \quad 50}{250}$ = 25 موظف

تكرار الفئة المطلوبة=100+25=125

نسبة العمال = $\frac{125}{500}$ $\frac{1}{4}$

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا مبينة كما يلي :

48	69	72	67	51	47	38	48	59	67
21	35	38	42	32	42	41	62	41	59
35	47	32	61	67	27	55	79	43	64
27	51	54	65	55	29	69	62	58	43
42	55	69	67	53	51	65	55	62	31

جدول (1 - 37)

المطلوب: 1) تكوين جدول تكراري

2) تحديد مراكز الفئات

3) التكرار النسبي والمئوي

4) تمثيل البيانات بواسطة الممدرج التكراري

5) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى التكراري

6) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى المضلع التكراري

7) عدد الطلاب الذين اوزانهم تقع بين 53-69.

8) عدد الطلاب الذين تزيد اوزانهم عن 40 كغم

9) عدد الطلاب الذين تقل وزانهم عن 45 كغم

الحل: 1) لتكوين جدول التكرار

1) نحدد المدى = أعلى قيمة- ادنى قيمة+1=79-21+1=58+1=59.

وليكن عدد الفئات = 6 حيث أن 5 ≤ عدد الفئات ≤ 10

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{59}{6} = 9.9 \approx 10$$

ثم نبدأ بتكوين الجدول التالي:

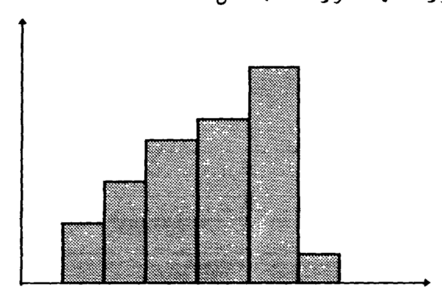
الفئات	التكرار	مركز الفئة	التكرار النسبي	التكرار المئوي
21-	4	26	$\frac{4}{50}$	0.08
31-	7	36	$\frac{7}{50}$	0.14
41-	11	46	$\frac{11}{50}$	0.22
51-	12	56	$\frac{12}{50}$	0.24
61-	14	66	$\frac{14}{50}$	0.28
71- 81	2	76	$\frac{2}{50}$	0.04
المجموع	50		$\frac{50}{50}$	1.00

جدول (1 - 37)

2) مركز الفئة= $\frac{\text{الحد الادنى للفئة الاولى+الحد الادنى للفئة الثانية}}{2} = \frac{31+21}{2} = 26$

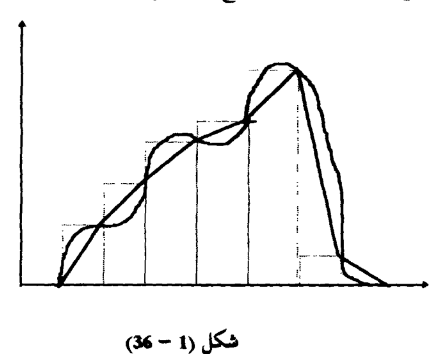
3) التكرارالنسبي للفئة = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$

4) المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة قواعدها هو الفئات وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.



شكل (1 – 35)

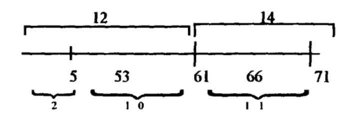
5) المنحنى التكراري كما هو موضح في الشكل:



شكل (1 – 36)

6) المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36).

7) نجد عدد الطلاب من الشكل (1-37):



شكل (1-37)

10 ← 12

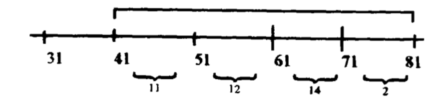
2← س ∴ س = $\frac{12\times2}{10}$ = 2.4 ≈ 2.5

10 ← 14

8← س ∴ س = $\frac{14\times8}{10}$ = 11.2 ≈ 11

∴ عدد الطلاب الذين تتراوح أوزانهم بين 53، 69 هو 10 + 11= 21 طالب

8) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1-38):



شكل (1-38)

40 - 31 = 9 ، 10 طول الفئة ويقابلها تكرار 7

10 ← 7

9 ← س ∴ س = $\frac{7\times9}{10}$ = 6.3 ≈ 6

عدد الطلاب = 1 + 11 + 12 + 14 + 2 = 40

9) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1–39):

21 31 41 45 51

4 7 4

شكل (1–39)

$10 \rightarrow 11$

$4 \rightarrow$ س $\therefore$ س $= \frac{11\times4}{10} = 4.4 \approx 4$

عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 = 4 + 7 + 4 = 15 طالب

تمارين عامة على الفصل الأول

س1– إذا كانت مراكز الفئات للبيانات المبوبة في جدول تكراري كالتالي:–

32، 35، 38، 41، 44

أوجد مايلي:

1) طول الفئة.

2) الفئات الفعلية للتوزيع.

3) فئات التوزيع.

س2 :– البيانات التالية تمثل عدد أمتار النسيج المصنوعة في 30 مصنعاً للنسيج خلال اسبوع بآلاف الأمتار.

40	49	57	46	59	40
39	51	58	47	39	44
48	53	41	61	52	56
42	55	60	62	56	61
44	54	43	63	43	63

أوجد ما يلي:–

1) مبتدئا بالعدد 39 شكل جدولا تكراريا ذات فئات منفصلة وطول كل فئة 5 وحدات.

2) كم عدد فئات الجدول

3) ارسم مدرجا تكراري.

4) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مركز الفئات.

5) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

6) اوجد التكرار النسبي لهذا التوزيع.

7) اوجد التكرار المئوي لهذا التوزيع.

8) كم مصنعا انتج اقل من 54 ألف متر.

9) كم مصنعا انتج اكثر من 48 ألف متر.

10) مبتدئا بالعدد 39 كون جدولا تكراريا اذا فئات بأطوال 4 وحدات شريطة أن تكون الفئات متصلة.

س3:– البيانات التالية تمثل اوزان 40 رجلا لاقرب كغم.

65	59	72	63	72	69	62	60
62	66	73	75	65	75	63	61
77	68	74	61	66	74	67	59
74	69	62	63	72	77	68	7
68	70	60	64	73	71	64	76

اوجد ما يلي:

1) مبتدئا بالعدد 59 كون جدولا تكراريا ذا فئات بطول 3 وحدات شريطة أن تكون هذه الفئات هي فئات متصلة وكم عدد هذه الفئات.

2) ارسم مدرجا تكراريا.

3) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مراكز الفئات.

4) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

5) اوجد التكرار النسبي لهذه التوزيع.

6) اوجد التكرار المئوي لهذا التوزيع.

7) كم عدد الذين تزيد اوزانهم عن 68 كغم أو تساوي 68 كغم.

8) كم عدد الذبن تقل اوزانهم عن 68 كغم.

9) مبتدئا بالعدد 58 كون جدولا تكراريا لفئات متصلة ويطول 4 وحدات.

س4:– كانت النتائج النهائية السنوية لاحدى المدارس الثانوية كما هي في الجدول التالي:–

فئات الطلاب	النسبة المئوية
الناجحون	٪65
الراسبون	٪10
المفصولون	٪5
حاملي المواد	٪20

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

س5: البيانات التالية تمثل اعداد الخريجين لاحدى الكليات في احد الأعوام الدراسية حسب التخصص والجنس

التخصص	الذكور	الإناث	المجموع
كمبيوتر	80	40	120
رياضيات	60	30	90
اجتماعيات	40	20	60
لغة عربية	100	60	160

والمطلوب ما يلي:-

1- قارن بين مختلف التخصصات بواسطة الأعمدة.

2- مثل كل تخصص على حدة بالقطاع الدائري ثم مثل جميع التخصصات في دائرة واحدة.

3- مثل التخصصات بالأعمدة دون التطرق إلى الجنس.

4- مثل هذه البيانات بالخط البياني.

س6:- البيانات التالية تمثل الدخل الكلي لاحدى المحافظات خلال الأعوام 1980/ 1984.

قارن بين هاتين الظاهرتين عن طريق تمثيلها بالخط البياني:-

جدول الدخل الكلي والانفاق الكلي بآلاف الدنانير

السنوات	الدخل الكلي	الانفاق الكلي
1980	190	130
1981	160	80
1982	210	140
1983	230	150
1984	200	135

س7:- عرف ما يلي:-

علم الإحصاء، علم الإحصاء الوصفي، علم الاحصاء التحليلي، المصادر التاريخية للمعلومات، المصادر الميدانية للمعلومات، الاستمارة الاحصائية ، كشف البحث، صحيفة الاستبيان، طريقة المسح الشامل، العينة، العينة العمدية، العينة العشوائية، الخطأ العشوائي، خطأ التحيز، تبويب

البيانات،التوزيع التكراري، الجدول التكراري، الفئة، التكرار النسبي، التكرار المئوي، الجداول المقفلة، الجداول المفتوحة ، الجدول المتظم، الجدول غير المنتظم، الفئات المنفصلة، الفئات المتصلة، المدرج التكراري.

س8:- ماهو الخطأ العشوائي، مصادره، كيفية التقليل من قيمته.

س9:- فيما يلي الجدول التكراري التجميعي لتوزيع الاجر الاسبوعي(بالدينار) لعمال مصنع ما عددهم"144" عاملاً.

التكرار التجميعي	اقل من
28	4
58	10
68	15
84	23
119	30
144	40

المطلوب:

1- رسم المنحنى التجميعي الصاعد والمنحنى التجميعي الهابط.

2- ما هي احداثيات نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط.

3- بناءا على المعلومات الموجودة في الجدول السابق:

اختيار العينة العشوائية المناسبة بكسر المعاينة(12/1)

س10: من المعلوم أن توزيع الطلبة المتخصصين في كلية الإقتصاد والعلوم الإدارية في الأعوام الدراسية 81/80 و81/ 82 كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص/ العام الدراسي	1981/1980	1982/1981
الاقتصاد والاحصاء	130	245
ادارة الاعمال	350	415
الادارة العامة	180	366
العلوم السياسية	60	122
المجموع	1000	1500

المطلوب:-

1- ما هو نوع (أو انواع) التصنيف الذي أدى الى تكوين هذا الجدول .

2- تمثيل البيانات الموجودة في الجدول.

أ- بطريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزئة.

ب- بطريقة الدوائر المقسمة الى قطاعات.

3- اختيار عينة عشوائية مناسبة بكسر المعاينة (0.02) من بين طلبة 81/80

س11:- فيما يلي الجدول التكراري المتجمع الصاعد لعينة مؤلفة من (50) طالباً ناجحاً موزعة حسب علاماتهم في مساق الاحصاء (101).

أقل من	أقل من60	أقل من 70	أقل من 80	اقل من 90	اقل من 100
التكرار المتجمع	8	20	40	47	50

المطلوب :1) تكوين الجدول التكراري الأصلي

2) تكوين الجدول التكراري النسبي

3) رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

س12: يبلغ عدد الطلبة في كلية الآداب (1000) طالباً من بينهم 600 من الاناث.

المطلوب اختيار العينة العشوائية الممثلة المناسبة بكسر المعاينة 0.020 وذلك من أجل تشكيل وفد طلابي، متبعا الخطوات بالترتيب مع ذكر هذه الخطوات.

س13:- فيما يلي جدول تكراري لتوزيع عينة مؤلفة من 60 طالبا حسب علاماتهم

فئات الطلاب	40-	50-	60-	70-	80-
عدد الطلبة	8	12	20	16	4

المطلوب:- 1. رسم المنحنى التجميعي الصاعد

2. حساب نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 76.

3. حساب العلامة التي حصل على أعلى منها 10٪ من الطلبة.

س14:- فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالبا حسب معدلاتهم التراكمية.

فئات العلامات	35-	60-	67-	76-	84-
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

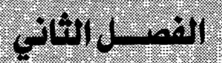
المطلوب إيجاد:-

1- الجدول التكراري المعدل .

2- نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين(65و75)

3- إذا اختير ما نسبته 15٪ من الطلبة للدراسات العليا ما هي أدنى علامة تؤهل الطالب للحصول علىهذه الفرصة.

4- رسم المضلع التكراري،وبيان تماثله.



مقاييس النزعة المركزية

2-1) مقدمة:

ان كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمركز والتكثف نحو رقم معين وهـذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هـذه القيمـة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثو الاحصاء العديد من هذه المقاييس.

1) الوسـط الحسـابي 2) الوسيط 3) المنـوال 4) الوسـط الهندسـي 5) الوسـط التوافقي 6) الوسط التربيعي.

هذا وسنتناول كل مقياس على حدى بنوع من التفصيل من حيـث الخصـائص وطرق ايجاده.

2-2) الوسط الحسابي:

تعريف: الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجمـوع هـذه المشـاهدات مقسـوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \qquad \text{.......................} \quad (1-2)$$

2 - 2 - 1) كيفية ايجاد الوسط الحسابي :

أ- اذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

1) البيانات غير مبوبة ومفردة(غير متكررة).

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات $س_1$، $س_2$، $س_3$،......،$س_ن$ ، فان الوسط الحسابي لهذه المشاهدات $\bar{س}$ هو

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + س_3 + ... + س_ن}{ن} \quad .... (2 - 2)$$

او باستخدام رمز المجموع فاننا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} \quad .... (3-2)$$

حيث ر=1،2،.....، ن.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

3،5،7،11،13، 21 والمطلوب ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل: باستخدام العلاقة أعلاه فان:

$$\bar{س} = \frac{21+13+11+5+3}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال: اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل: من العلاقة الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$84 = \frac{420}{ن} \Leftarrow ن = \frac{420 \times 1}{84} = 5$$ مشاهدات

2) اذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فاننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات $س_1، س_2، ....، س_ن$ وتكراراتها المقابلة على التوالي $ك_1، ك_2، ......، ك_ن$ فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{س} = \frac{س_1 \times ك_1 + س_2 \times ك_2 + ... + س_ن \times ك_ن}{ك_1 + ك_2 .... + ك_ن} \quad .... (4-2)$$

او باستخدام صيغة لمجموع

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر} \quad .... (5-2)$$

مثال: في شعبة ادارة الاعمال اعطى مئة طالب امتحان احصاء عشر من علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (2-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (2 – 1)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل اما بتكوين جدول الحل (2 – 2) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار $ك_ر$	العلامة $س_ر$	$س_ر ك_ر$
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

ثم نجد $\bar{س} = \frac{733}{100} = 7.33$

او نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة $\bar{س} = \frac{\sum س_ر \times ك_ر}{\sum ك_ر}$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{س} = \frac{2\times4+8\times5+13\times6+35\times7+21\times8+16\times9+5\times10}{2+8+13+35+21+16+5}$$

$$= \frac{8+40+78+245+168+144+50}{100} = \frac{733}{100} = 7.33$$

ب) ايجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

1) طريقة استخدام التكرارات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي $س_ر×ك_ر$.
- نجد مجموع التكرارات أي $\sum ك_ر$
- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad \text{.........................} \quad (6-2)$$

مثال: اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (2-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (2 – 3)

الحل: نشكل الجدول (2 – 4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$س_ر×ك_ر$
20- 24	7	22	154=22×7
25- 29	13	27	351=27×13
30-34	21	32	672 =32×21
35-39	6	37	222=37×6
40-44	3	42	126=42×3
المجموع	50		1525

جدول (2 – 4)

ومن العلاقة نقسم مجموع حاصل الضرب على مجموع التكرارات.

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

فاننا نجد ان $\bar{س} = \frac{1525}{50} = 30.5$

2) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي:

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما تكون الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز(أ).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز $ح_ر$
- نجد مجموع حاصل الضرب أي $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر$
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad \text{.......................... (7 - 2)}$$

مثال: اذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (2 - 5):

الفئات	30-	40-	50-	60-	70-	المجموع
التكرار $ك_ر$	2	9	21	11	7	50

جدول (2 – 5)

المطلوب ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (2 – 6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات:

الفئات	التكرار$ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$ح_ر=س_ر-أ$	$ح_ر×ك_ر$
30-	2	35	20- =55-35	40-=20-×2
40-	9	45	10- =55-45	90-=10-×9
50-	21	(55)	0 =55-55	0=0×21
60-	11	65	10=55-65	110=10×11
70-	7	75	20=55-75	140=20×7
المجموع	50			120

جدول (2 – 6)

وليكن الوسط الفرضي أ=55 وباستخدام العلاقة أدناه فان:

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

نجد ان $\bar{س} = 55 + \frac{120}{50} = 55 + 24 = 57.4$

3) ايجاد المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

ولايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات $س_ر$
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكرار من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي $ح_ر$
- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن $\acute{ح}_ر = \frac{ح_ر}{\text{طول الفئة}} = \frac{ح_ر}{ل}$
- نجد حاصل ضرب $\acute{ح}$ س×$ك_ر$
- نجد مجموع حاصل ضرب $\acute{ح}_ر$ ×$ك_ر$
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \acute{ح}_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \times ل \quad \text{.................... (8-2)}$$

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين في الجدول (2– 7).

الفئات	54–50	59–55	64–60	69–65	74–70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (2– 7)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	الانحرافات عن الوسط الفرضي $ح_ر$	الانحرافات المختصرة $حَ_ر$	$حَ_ر \times ك_ر$
54-50	7	52	10 = 62 -52	$2- = \frac{10-}{5}$	14-=2-×7
59 -55	13	57	5- = 62 -57	$1- = \frac{5-}{5}$	13-=1-×13
64-60	25	62	0 = 62 -62	$0 = \frac{0}{5}$	0=0×25
69-65	3	67	5=62-67	$1 = \frac{5}{5}$	3=1×3
74-70	2	72	10=62 -72	$2 = \frac{10}{5}$	4=2×2
المجموع	50				20-

جدول (2 – 8)

وليكن الوسط الفرضي أ= 62

وبتطبيق العلاقة $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} حَ_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \times ل$

نجد ان $\bar{س} = 62 - \frac{20}{50} \times 5 = 62 - 2 = 60$

مثال: البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (2-9):

الفئات	30-	35-	40-	45-	50-	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (2 – 9)

المطلوب ايجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

جـ) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار ك ر	مراكز الفئات س ر	س ر × ك ر	ح ر = س ر − أ	ح ر × ك ر	ح̃ ر = ح ر / ل	ح̃ ر × ك ر
30-	7	32.5	227.5	10- = 42.5-32.5	70- = 10-×7	2- = $\frac{10-}{5}$	14- = 2-×7
35-	17	37.5	637.5	5- = 42.5-37.5	85- = 5-×17	1- = $\frac{5-}{5}$	17- = 1-×17
40-	36	42.5	1530	0=42.5-42.5	0=0×36	0 = $\frac{0}{5}$	0=0×36
45-	29	47.5	1377.5	5=42.5-47.5	145=5×29	1 = $\frac{5}{5}$	29=1×29
50-	11	52.5	577.5	10=42.5-52.5	110=10×11	2 = $\frac{10}{5}$	22=2×11
المجموع	100		4350		100		20

جدول (2 – 10)

ليكن الوسط الفرضي أ= 42.5

ليكن الوسط الفرضي أ= 42.5

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$

$$\bar{س} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

من العلاقة $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$

$$\bar{س} = 42.5 + \frac{100}{100} = 42.5 + 1 = 43.5$$

جـ) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

من العلاقة: $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \acute{ح}_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \times ل$

$$\bar{س} = 42.5 + \frac{20}{100} \times 5 = 42.5 + 1 = 43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

2 - 2 - 2) الوسط الحسابي المرجح:

لعل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عناصر مختلفة ولابد من التوقف عند هذا المفهوم لنتناول هذا التعريف.

تعريف: اذا كان لدينا من مجموعات من المشاهدات معروفة $ن_1$، $ن_2$،...، $ن_ر$ وقمنا

بعملية دمج مجموعات المشاهدات المختلفة وأردنا ايجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج فاننا نجد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة التالية:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\bar{\text{س}}_1 \times \text{ن}_1 + \bar{\text{س}}_2 \times \text{ن}_2 + \ldots + \bar{\text{س}}_\text{ر} \times \text{ن}_\text{ر}}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \ldots + \text{ن}_\text{ر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9-2)$$

مثال: اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي $\text{ن}_1 = 15$، $\text{ن}_2 = 20$، $\text{ن}_3 = 25$ وكانت اوساطها $\bar{\text{س}}_1 = 45$، $\bar{\text{س}}_2 = 75$، $\bar{\text{س}}_3 = 60$ ودمجت المجموعات الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للمجموعات بعد الدمج.

الحل: $\bar{\text{س}} = \frac{\text{ن}_1 \times \text{س}_1 + \text{ن}_2 \times \text{س}_2 + \text{ن}_3 \times \text{س}_3}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2 + \text{ن}_3}$

$$= \frac{60 \times 25 \times 75 \times 20 \times 45 \times 15}{25 + 20 + 15}$$

$$61.25 = \frac{3675}{60} = \frac{1500 + 1500 + 675}{60} =$$

2 – 2 – 3) خصائص الوسط الحسابي:

1) مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات 17، 21، 15، 27، 20 أثبت أن مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

الحل: نجد الوسط الحسابي $20 = \frac{100}{5} = \frac{20 + 27 + 15 + 2 + 17}{5} = \bar{\text{س}}$

نجد الانحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي:

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 17 - 20 = -3$

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 21 - 20 = +1$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 15 - 20 = -5$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 27 - 20 = +7$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 20 - 20 = 0$

$\sum ح_ر = -3 + 1 - 5 + 7 =$ صفر.

وهذا ما يؤكد الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي= صفر.

2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال: اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.

37، 13، 50، 40، 2500

الحل: $\bar{س} = \frac{2500+40+50+13+37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال: اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

الحل: $\bar{س} = \frac{40+50+13+37}{4} = \frac{140}{4} = 35$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

3) يأخذ كل قيم المشاهدات في الاعتبار من العلاقة:

وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + ... + س_ن}{ن}$$

مثال: اوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان احصاء كانت كما يلي 7،9،6،0،8

الحل: نجد $\bar{س} = \frac{7+9+6+0+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$

4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لتراتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

5) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة اخرى.

مثال: أ) اوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 3،5، 9،13، 10 ثم اوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

الحل: نجد: $\bar{س} = \frac{3+5+9+13+10}{5} = \frac{40}{5} = 8$

نجد:

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 3 - 8 = -5$ ، $ح_1^2 = 25$

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 5 - 8 = -3$ ، $ح_2^2 = 9$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 9 - 8 = 1$ ، $ح_3^2 = 1$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 13 - 8 = 5$ ، $ح_4^2 = 25$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 10 - 8 = 2$ ، $ح_5^2 = 4$

ثم نجد $\sum ح_ر^2 = 64$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن المشاهدة 13

$ح_1 = س_1 - 13 = 3 - 13 = -10$ ، $ح_1^2 = 100$

$ح_2 = س_2 - 13 = 5 - 13 = -8$ ، $ح_2^2 = 25$

$ح_3 = س_3 - 13 = 9 - 13 = -4$ ، $ح_3^2 = 16$

$ح_4 = س_4 - 13 = 13 - 13 = 0$ ، $ح_4^2 = 0$

$ح_5 = س_5 - 13 = 10 - 13 = -3$ ، $ح_5^2 = 9$

نجد أن $\sum ح_ر^2 = 150$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من مجموع انحرافات القيم عن اية قيمة اخرى لأن $64 < 150$.

5) عند اضافة عدد ثابت الى جميع قيم المشاهدات فاننا نضيف هذه العدد الى الوسط الحسابي.

6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فاننا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

2-3) الوسيط:

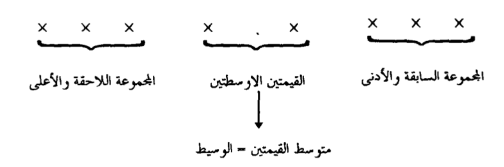
نبدأ التحدث عن مفهوم الوسيط باعطاء التعريف التالي.

تعريف: الوسيط هو عبارة عن القيمة الاوسطية لمجموعة من القيم رُتبت تصاعديـا أو تنازليا في حالة اذا كان عدد القيم فردية ومتوسط القيمتين الأوسطيتين. اذا كان عدد القيم زوجياً.

× × ×   ×   × × ×

المجموعة السابقة والأدنى   ↓ الوسيط   المجموعة اللاحقة والأعلى

هذا التمثيل اذا كان عدد القيم مفردة والترتيب تصاعدياً.



2 - 3 - 1) كيفية ايجاد الوسيط:

أ) حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة.

يوجد حالتان لحساب الوسيط من هذه البيانات.

أ- اذا كان عدد القيم غير المبوبة فرديا.

اذا كان لدينا قيم المشاهدات س$_1$، س$_2$، س$_3$، ......، س$_ن$ وكانت ن فردية لحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية.

- ترتب البيانات ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً ولكن سنتاول في كتابنا الترتيب التصاعدي.

- نجد ترتيب الوسيط من العلاقة:

ترتيب الوسيط= $\frac{ن+1}{2}$ حيث ن عدد القيم.

3- نجد قيمة الوسيط وهي القيمة المناظرة لترتيب الوسيط.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3،21،5،9،11،7،14. اوجد الوسيط لهذه القيم.

الحل: نتبع الخطوات اعلاه

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيبا تصاعدياً كما في الجدول (2 – 11)

القيمة	3	5	7	9 ↑	11	14	21
الترتيب	1	2	3	4	5	6	7

جدول (2 – 11)

ثم نضع ترتيب كل قيمة

2) نجد ترتيب الوسيط حيث ترتيب الوسيط = $\frac{7+1}{2} = 4$ أي الترتيب الرابع

3) نجد قيمة الوسيط(و) وهي القيمة التي تناظر الترتيب الرابع والمشار لها بالسهم فيكون قيمة الوسيط و= 9

ب – اذا كان عدد القيم غير المبوبة زوجياً.

لايجاد الوسيط لهذه القيم نتبع الخطوات التالية.

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

2) نجد ترتيب الوسيطين من العلاقة التالية:

ترتيب $و_1$ (الوسيط الأول)= $\frac{ن}{2}$ .... (2-10)

ترتيب $و_2$ الوسيط الثاني= $\frac{ن}{2}+1$ أو $\frac{ن+2}{2}$ .... (2-11)

3) نجد قيم $و_1$، $و_2$ المناظرة لترتيبهما.

4) نجد و(الوسيط) من العلاقة:

$و = \frac{و_1 + و_2}{2}$ .... (2-12)

مثال: اوجد الوسيط لقيم المشاهدات 3،7،25،15،29،11،18،20

الحل: نتبع الخطوات التالية.

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً. ونضع مقابل كل قيمة ترتيبها.

3	7	11	15	18	20	25	29
1	2	3	↑ 4	↑ 5	6	7	8

2) نجد ترتيب الوسيطان $و_1$، $و_2$ من العلاقتين السابق ذكرهما، فيكون ترتيب $و_1$= $\frac{8}{2} = 4$ أي الرابع، وترتيب $و_2$ = 4 + 1 = 5 أي الخامس.

3) نجد القيم المناظرة لترتيبهما كما هو مشار بالأسهم فيكون قيمة $و_1$=15، وقيمة $و_2$=18.

4) نجد الوسيط و للقيم من العلاقة:

$$و = \frac{و_1 + و_2}{2} = \frac{18+15}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

ب) حساب الوسيط للبيانات المبوبة.

قبل الخوض في ايجاد الوسيط للبيانات المبوبة وذكر الخطوات لها لابد من التعرف لمفهوم التكرار المتجمع الصاعد والهابط.

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد هو اضافة تكرار الفئة(او الفئات) السابقة لتكرار الفئة اللاحقة ويبدأ التكرار المتجمع الصاعد بالصفر وينتهي بمجموع التكرارات الكلي وبعمل جدول متجمع صاعد نتبع الخطوات التالية

1) نضيف فئة سابقة في الجدول المعطى تكرارها صفراً.

2) نجد الحدود الفعلية لكل فئة.

3) نجد عمود الحدود الفعلية العليا ونسبقها برمز للدلالة على أصغر من.

4) نجد عمود التكرارات المتجمعة بحيث يكون تكرار الفئة التي هي اقل من الحد الادنى المعطى = صفر

تكرار الفئة المتجمعة الاولى = تكرار الفئة الاولى المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثانية= تكرار الفئة الاولى المعطاة + تكرار الفئة الثانية المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثالثة=تكرار الفئة الاولى المعطاة+تكرار الفئة الثانية المعطاة+ الثالثة

.
.
.

تكرار الفئة المتجمعة الاخيرة= مجموع التكرارات جميعها.

والآن ننتقل الى كيفية ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة.

ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة:

لايجاد الوسيط للبيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية:

1) نضيف للجدول المعطى فئة سابقة تكرارها صفراً.

2) نجد عمود للفئات الفعلية العلوية.

3) نجد عمود تكرار المتجمع الصاعد.

4) نجد ترتيب الوسيط من العلاقة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}{2} \quad \ldots\ldots(13-2)$$

5) نحدد موقع ترتيب الوسيط بين تكرارات المتجمعة الصاعدة ونشير له بسهم.

6) نجد الفئة الوسيطية بحديها الفعليين الأدنى والأعلى وهي الفئة التي تقع تحت السهم الذي يشير لترتيب الوسيط.

7) نحدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

8) نحدد تكرارا المتجمع السابق واللاحق لترتيب الوسيط.

9) نحدد طول الفئة الوسيطية.

10) نجد الوسيط من العلاقة:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الوسيط}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط}} \times \text{طول الفئة} \quad ..(14-2)$$

مثال: البيانات التالية تمثل الاجور الشهرية لمائة عامل موزعين بالجدول (2-12).

فئات الاجور	69-60	79-70	89-80	99-90	109-100	المجموع
عدد العمال	6	12	47	25	10	100

جدول (2 – 12)

المطلوب: ايجاد مايلي:-

أ) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم اقل من 60 دينار.

ب) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم بين 60واقل من 100دينار.

جـ)اوجد عدد العمال الذين رواتبهم 80دينار فأكثر.

د)اوجد الوسيط لهذه االاجور .

هـ) اوجد الوسيط بطريقة الرسم.

الحل: أ) عدد العمال الذين تقل رواتبهم عن 60=صفر.

ب) عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 وأقل من 100دينار.

= 6+12+47+25= 90 عاملاً.

جـ) عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر = 47+25+10=82 عاملاً.

د) لايجاد الوسيط نتبع الخطوات السابقة ونشكل الجدول (2-13) الذي يشمل جزءاً من الخطوات.

الفئات	تكرار الفئة	الفعات الفعلية	الفئات الفعلية العليا	التكرار المتجمع الصاعد	
59-50	صفر	59.5-49.5	59.5 >	صفر	
69-60	6	69.5-59.5	69.5 >	6	← التكرار السابق لترتيب الوسيط
79-70	12	79.5-69.5	79.5 >	18	ترتيب الوسيط
89-80	47	89.5- 79.5	89.5 >	65	← التكرار السابق لترتيب الوسيط
99-90	25	99.5-89.5	99.5 >	90	
109-100	10	109.5-99.5	109.5 >	100	

جدول (2-13)

ثم نتبع الخطوات الاربع التالية:

1) نجد ترتيب الوسيط= $\frac{100}{2} = 50$

2) نجد الفئة الوسيطية (79.5 - 89.5)

3) نجد الحد الأدنى للفئة الوسيطية=79.5.

4) نطبق العلاقة:

$$\text{الوسيط} = 79.5 + \frac{18-50}{18-65} \times 10$$

$$= 79.5 + \frac{10 \times 32}{47} = 79.5 + \frac{320}{47}$$

$$= 79.5 + 6.81 = 86.31$$

ونلاحظ ان قيمة الوسيط وقعت ضمن الفئة الوسيطية ولذا سميت الفئة الوسيطية.

هـ- لايجاد الوسيط بطريقة الرسم نتبع الخطوات التالية:

1) نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل الحدود العليا الفعلية والمحور الرأسي يمثل عليه التكرار المتجمع الصاعد.

2) نجد ترتيب الوسيط $=\frac{100}{2}=50$.

3) نعين النقاط التي احداثها الأول يمثل الفئات الفعلية والاحداثي الثاني يمثل التكرار المتجمع المقابل لها.

4) نرسم المنحنى المار بهذه النقاط ويسمى المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

5) نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ونقيم عمود من هذه النقطة على المحور الرأسي وموازي للمحور الأفقي يتقاطع مع المنحنى في نقطة.

6) ننزل من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي يتقاطع معه في نقطة تدل على الوسيط.

والآن نقوم برسم المنحنى لتحديد قيمة الوسيط من الرسم.

رسم المنحنى:

مثال: البيانات التالية تمثل احور 100 عامل مبينة بالجدول (2 - 14).

فئات الأجور	80-	90-	100-	110-	130-120
التكرار	8	22	41	19	10

جدول (2 - 14)

الحل: نكون جدول الحل (2 - 15)

فئات الأجور	التكرار	فئات أقل < 80	التكـرار التجمعي	
-80	8	90 >	8	السابق
-90	22	100>	30	ترتيب الوسيط 50
-100	41	110>	71	اللاحق
-110	19	120>	90	
130-120	10	130>	100	
	100			

جدول (2 – 15)

المطلوب: 1) ايجاد الوسيط بالطريقة الحسابية

2) ايجاد الوسيط بالطريقة البيانية (الهندسية) .

الحل: 1) ترتيب الوسيط= $\frac{\sum_{ر-1}^{ن} ك_ر}{2} = \frac{100}{2} = 50$

الفئة الوسيطية= 100- وحدها الأدنى = 100

قيمة الوسيط و= 100+ $\frac{50-30}{71-30} \times \frac{10}{1}$

$= 100 + \frac{20 \times 10}{41 \times 1} = 100 + \frac{200}{41} = 100 + 4.9 = 104.9$

2) ايجاد الوسيط بالطريقة البيانية

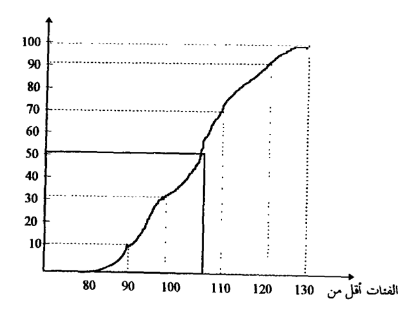
- نرسم المنحنى المتجمع الصاعد

- نجد ترتيب الوسيط

- نقيم عمود ومن نقطة ترتيب الوسيط ليقطع المنحنى في نقطة مثل ن ثم من النقطة ن عمود يقطع محور الفئات في نقطة مثل م فتكون القيمة المقابلة للنقطة م هي قيمة الوسيط

$$\text{ترتيب الوسيط}: \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

قيمة الوسيط= 104.9



تعريف: مقاييس اشباه الوسيط: هي مقاييس تشبه الوسيط الا انها لاتعتبر من مقاييس النزعة المركزية ومن هذه المقاييس نذكر منها.

2 - 3 - 2) خصائص الوسيط

1) الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال في الوسط الحسابي

مثال: اوجد الوسيط لقيم المشاهدات:

.47،22،31،2555،3،21،7

الحل: نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.

3 7 21 22 31 47 2555

- نجد ترتيب الوسيط و= $\frac{1+7}{2}=4$ ∴ القيمة الرابعة هي الوسيط

- نأخذ القيمة المناظرة لترتيب الوسيط فنجد ان و=22 نلاحظ ان القيمة المتطرفة 2555 لم تؤثر على قيمة الوسيط.

2) الوسيط يتأثر بعدد القيم للمشاهدات .

مثال: اوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية.

7،11،5،33،19،4،8

الحل: نرتب قيم المشاهدات تصاعدياً

4 5 7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

- نجد ترتيب الوسيط = $\frac{1+7}{2}=4$ أي الرابع.

يكون الوسيط مساوي للقيمة المناظرة للترتيب

و = 8

ولو حذفنا المشاهدتين 5،4 مثلا ثم نعيد ترتيب البيانات

7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5)

ونجد الوسيط و= 11 نلاحظ ان الوسيط تغير و لم يبقى ثابتاً.

3) يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.

4) يمكن ايجاده من لجداول المفتوحة.

5) مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسيطها اقل من مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن اية قيمة أخرى في حالة البيانات غير المبوبة.

مثال: اوجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات 3،11،5،9،14 عن وسيط هذه القيم ثم اوجد الانحرافات المطلقة عن القيمة 5.

الحل: نرتب القيم ترتيبا تصاعديا

14	11	9	5	3
(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

الوسيط 9

الانحرافات عن الوسيط المطلقة

$|ح_1| = |3-9| = 6$

$|ح_2| = |5-9| = 4$

$|ح_3| = |9-9| = 0$

$|ح_4| = |11-9| = 2$

$|ح_5| = |14-9| = 5$

المجموع= 17

الانحرافات المطلقة عن القيمة 5

$ح_1 = |3-5| = 2$

$ح_2 = |5-5| = 0$

$ح_3 = |5-9| = 4$

$ح_4 = |5-11| = 6$

$ح_5 = |5-14| = 9$

المجموع=21

نلاحظ ان مجموع الانحرافات عن الوسيط هي اقل من مجموع الانحرافات عن اية قيمة اخرى.

2 - 4) المئينات

2 - 4 - 1) مفهوم المئين:

ان تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى مئة جزء متساو يسمى بالمئينات فالمئين الاول $م_1$ هو القيمة التي يسبقها 1٪ من البيانات ويليها 99٪ من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والمئين الثلاثون($م_{30}$) هو القيمة التي يسبقها 30٪ من البيانات ويليها 70٪ من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا.

2 - 4 - 2) كيفية ايجاد المئينات

أ- اذا كانت البيانات غير مبوبة. نتبع الخطوات التالية:-

- نقوم بترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا.
- نجد ترتيب المئين من العلاقة التالية:-

$$\text{ترتيب المئين المطلوب} = \frac{\text{المئين}}{100} \times (\text{عدد المشاهدات}+1) \quad ...(2-15)$$

وبشكل رموز يمكن صياغة العلاقة كما يلي

$$\text{ترتيب المئين} = \frac{م}{100} \times (ن+1) \qquad (16-2)$$

- نجد موقع المئين.

- نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه.

مثال: البيانات التالية تمثل الرواتب لسبعة عمال اوجد المئين الاربعين لهذه الرواتب

80، 75، 60، 90، 68، 88، 64

الحل: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا

60	64	68	75	80	88	90	القيمة
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	الترتيب

نجد ترتيب $م_{40}$ من العلاقة أعلاه:

$$\text{ترتيب } م_{40} = \frac{40}{100}(7+1) = 3.2$$

$3 \leq 3.2 \leq 4$ أي أن ترتيب $م_{40}$ يقع بين الترتيب الثالث والرابع

نجد القيم المناظرة للترتيبين الثالث والرابع وهي 68، 75

$$\therefore \text{ قيمة } م_{40} = \frac{75+68}{2} = \frac{143}{2} = 71.5$$

وتفسير الجواب ان 40٪ من مجموع الرواتب تقل عن 71.5 دينار و60٪ من الرواتب تزيد عن 71.5 دينار.

ب) ايجاد المئين لقيم المشاهدات المبوبة

ويتم بطريقتين

1) الطريقة الحسابية الاولى 2) الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين تشبه تماما الخطوات المتبعة في ايجاد الوسيط لان الوسيط هو عبارة عن مئين 50

1) الطريقة الحسابية الاولى:-

- نشكل جدولا تكراريا متجمعا صاعداً.

- نجد ترتيب المئين= (رقم المئين / 100) × مجموع التكرارات .... (2-17)

وبصيغة رمزية= $\frac{م}{100} \times \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر$ ....(2-18)

- نحدد موقع ترتيب المئين ونشير اليه بسهم.

- نجد الفئة المئينية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم الذي يحدد موقع ترتيب المئين في الفئات المنفصلة. أما في الفئات المتصلة فان السهم يمر بين حديها.

نجد المئين من العلاقة التالية:-

المئين= الحد الادنى للفئة المئينية+ $\frac{\text{ترتيب المئين – التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق – التكرار المتجمع الصاعد السابق}}$ × طول الفئة ....(2-19)

مثال: البيانات التالية تمثل اطوال 40 طالباً موزعين كما في الجدول (2-16):-

فئات الاطوال	15-	160-	163-	166-	169 -172
عدد الطلاب	5-	7	12	9	7

جدول (2 – 16)

المطلوب: 1) ايجاد مئين (م$_1$) 2) ايجاد مئين 30(م$_{30}$)

3) ايجاد مئين 90(م$_{\%90}$)

الحل: نشكل اولا جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (2 – 17).

فئات الاطوال	عدد الطلاب	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
157-	5	157>	00
160-	7	160>	5
163-	12	163>	12
166-	9	166>	24
169-172	7	169>	33
		172>	40
المجموع	40		

جدول (2 – 17)

نستخرج ترتيب م$_1$ = $\frac{1}{100} \times 40 = \frac{4}{10} = 0.4$ ونلاحظ هنا بأن ترتيب هو أقـل من التكرار المتجمع الصاعد للفئة الاولى(1) وعلى هذا الاساس لانستطيع حل السؤال

بهذه الطريقة الا اذا اضفنا فئة سابقة وتكرارها صفر لان ترتيب أي مئين لابد ان يكون له تكرار متجمع صاعد سابق وتكرار متجمع صاعد لاحق.

الفئة المئينية $م_1$= 157 واقل من 160

الحد الادنى = 157

طول الفئة المئينية= 157- 160

التكرار السابق= 0 والتكرار اللاحق= 5 وبتطبيق القاعدة اعلاه نجد $م_1$من العلاقة

∴ قيمة $م_1$= $157 + \frac{\therefore -04}{\therefore -5} \times 3 = 157 + 0.24 = 157.24$

2) لايجاد المئين 30($م_{30\%}$)

بالاعتماد على الجدول السابق

نجد ترتيب المئين 30= $\frac{30}{100} \times 40 = 12$

وفي هذه الحالة نلاحظ بأن ترتيب المئين جاء مطابقا لاحد التكرارات المتجمعة الصاعدة وهو 12 فان $م_{30\%}$ في هذه الحالة يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد(12)= 163.

3) ايجاد مئين 90($م_{90\%}$)

بناء على المعلومات الموجودة في الجدول اعلاه

نجد ترتيب المئين 90٪= $\frac{90}{100} \times 40 = 36$

الفئة المئينية=169 واقل من 172 وحدها الادنى 169

طول الفئة= 172−169=3

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 33

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق= 40

$$م_{90}=169+\frac{36-33}{40-33}\times 3=169+\frac{3}{7}\times 3=$$

$$169+\frac{9}{7}=169+1.28=170.282$$

– ايجاد المئين بالطريقة الحسابية الثانية:

ان الخطوات لهذه الطريقة تتطابق تماما مع الخطوات المستخدمة في الطريقة الحسابية الثانية لايجاد الوسيط لان الوسيط هو مئين 50.

مثال: باستخدام البيانات الواردة في المثال اعلاه اوجد ما يلي:-

1) م1٪ 2) م90٪

الحل: لايجاد م1٪ نتبع ما يلي:-

1) نجد ترتيب $م_1=\frac{1}{100}\times 40=0.4$ ثم نحدد الموقع

	الفئة المئينية			التكرار المتجمع الصاعد	
3	157	س	0.4	0	5
	$م_1$			0.4	
	163			5	

$\frac{س}{3}=\frac{0.4}{5}$ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن 5س =1.2 ∴ $س=\frac{12}{5}=0.24$

∴ مئين $_1$ ($م_1$) = الحد الادنى للفئة المئينية+ قيمة س= 157+0.24=157.24

=160+0.3=160.3

2) **ايجاد مئين 90**

الفئة المئينية		التكرار المتجمع الصاعد	
169	3	33	3
س $م_{90}$		36	7
172		40	

$\frac{س}{3}=\frac{3}{7}$ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن 7س=9⇐ س = $\frac{9}{7}$=1.28

∴ $م_{90}$ = 169+1.28= 170.28

تفسير نتيجة $م_1$ = 157.24 ان 1٪ من اطوال الطلاب تقل عن 157.24 وان 99٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 157.24

تفسير نتيجة $م_{90}$ ان 90٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 170.28 وان 10٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 170.28

2 - 4-3) الترتيب المئيني:

نود أن نقارن بين المئين والترتيب المئيني. لو فرضنا انه يوجد لدينا جدول تكراري يحتوي على اطوال لعدد من الطلاب ونفترض اننا قمنا باستخراج المئين 80وحصلنا على قيمة رقمية هي 168.9 وتفسير هذه القيمة ان 80٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 168.9 وان 20٪ منهم تزيد اطوالهم عن 168.9 ولو فرضنا ان طالبا طوله 170 سم وطلب الينا ان نجد نسبة الطلاب الذين تقل اطوالهم عن هذه القيمة(170سم) فانه لابد من استخراج الترتيب المئيني

مثال: البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية ل(40) عاملا أوجد نسبة العمال الذيـن تقل اجورهم عن 17 دينار

فئات الاجور	12-	14-	16-	20-18
عدد العمال	15	13	10	2

الحل: نشكل الجدول التالي:

فئات الاجور	عدد العمال	التكرار المتجمع الصاعد
12-	15	15
14-	13	28
16-	10	38
20-18	2	40

نجد الترتيب المئيني من العلاقة التالية:

$$\text{ق} = \text{ح} + \frac{\frac{\text{ك}}{100} \times \text{ج} - \text{س}}{\text{ف}} \times \text{ل} \qquad (20 - 2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث

ق= القيمة المعطاة والمراد استخراج الترتيب المئيني لها وفي المثال اعلاه ق=17

ح = الحد الادنى للفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

$\frac{\text{ك}}{100}$ = الترتيب المئيني

جـ= مجموع التكرارات

س= التكرار المتجمع الصاعد للفئةالتي تسبق الفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

ف= التكرار العادي التي تقع فيها القيمة

ل= طول الفئة.

الحل: نطبق العلاقة أعلاه.

$17=16+\frac{(28-40\times\frac{ك}{100})}{10}\times 2$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 10

$170=160+(\frac{40ك}{100}-28)\times 2$ نفك القوس بالضرب في 2

$170=160+\frac{80ك}{100}-56$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 100

$17000=16000+80ك-5600$

$17000-16000+5600=80ك$

$6600=80ك$

$ك=\frac{6600}{80}=82.5\%$

وتفسير هذا الجواب ان 82.5 من مجموع العمال تقل اجورهم عن 17 دينار.

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعة كما هو في الجدول (2-18) والمطلوب ايجاد نسبة الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.

فئات الاوزان	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	المجموع
عدد الطلاب	10	12	8	14	6	50

جدول (2 – 18)

الحل: نكون جدول الحل (2 – 19).

فئات الاوزان	عدد الطلاب	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
54–50	10	54.5–49.5	10
59–55	12	59.5–54.5	22
64–60	8	64.5–59.5	30
69–65	14	69.5–64.5	44
74–70	6	74.5–69.5	50
المجموع	50		

جدول (2 – 19)

ثم بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$68=64.5+\frac{\frac{ك}{100}\times 50-30}{4}\times 5$$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 14

$$952=903+(\frac{50ك}{100}-30)\times 5$$ نفك القوس بالضرب في خمسة

$$952=903+\frac{250ك}{100}-150$$ نضرب المعادلة في 100

$$95200= 90300+250ك-15000$$ ننقل الثوابت في جهة والمتغيرات في الجهة الأخرى

$$95200-9033+15000=250ك$$

$$4900+15000=250ك$$

$$19900=250ك$$

$$ك=\frac{19900}{250}=79.6\%$$

2 - 4-4) الربيعات

ان مفهوم الربيعات هو تقسيم مساحة المنخنى لتوزيع تكراري الى اربعة اجـزاء متساوية يسمى بالربيعات ويوجد ثلاثة ربيعـات مرتبـة مـن اليسـار الى اليمـين وهـي الربيع الاول او الربيع الادنى او م$_{25}$ والربيع الثاني او الوسيط او م$_{50}$ والربيع الثـالث او الربيع الاعلى اوم$_{75}$ وعلى فرض ان البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا فاننا نعرف كل ربيع على حده.

تعريف: الربيع الاول هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويليها ثلاثة اربـا ع البيانـات. وسنرمز له بالرمز ر$_1$.

تعريف: الربيع الثاني هو القيمة الـتي يسبقها نصـف البيانـات ويليهـا النصـف الآخـر. وسنرمز له بالرمز ر$_2$.

تعريف : الربيع الثالث هو القيمة التي يسبقها ثلاثة اربا ع البيانات ويليها ربع البيانــات. وسنرمز له بالرمز ر$_3$.

والربيعات هي من أشباه مقاييس النزعة المركزية ويمكن ايجادها:

أ- من البيانات غير المبوبة(المفردة) ومن أمثلتها:

1- ايجاد الربيع الادنى(الاول) نتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا.
- نجد ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية:

$$م_{25} = \frac{25}{100}(ن+1)$$

- نجد موقع ترتيب الربيع الادنى بين التراتيب.

- نجد القيم المناظرة للتراتيب التي تحصر ترتيب الربيع الادنى.

- نجد قيمة الربيع الادنى من العلاقة.

قيمةالربيع الادنى= المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتين تحصران الربيع الادنى.

- الربيع الثاني(الوسيط(م$_{50}$) يمكن ايجاده كما مر في الوسيط.

- ايجاد الربيع الثالث او م او 75 او الربيع الاعلى ونتبع الخطوات التالية:

1) نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.

2) نجد ترتيب الربيع الثالث من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الثالث (م}_{75}\text{)} = \frac{75}{100}(\text{ن}+1)$$

3) نحدد موقع ترتيب الربيع الثالث من بين التراتيب للقيم.

4) نجد القيم المناظرة للتراتيب التي تحصر الربيع الثالث.

5) نجد قيمة الربيع الثالث من االعلاقة.

قيمة الربيع الثالث= المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتان تحصران الربيع الاعلى.

مثال: البيانات التالية تمثل علامات ستة طلاب من عشرة درجات 9،1،7،8،6،5

اوجد مايلي :

1) الربيع الادنى مع تفسير النتيجة.

2) الربيع الاعلى مع تفسير النتيجة.

الحل: 1) الربيع الادنى

- نرتب البيانات تصاعديا على النحو التالي

10	9	8	7	6	5
(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

- ترتيب الربيع الادنى = $\frac{25}{100}(ن+1)=\frac{1}{4}(6+1)=\frac{1}{4}\times 7=\frac{7}{4}=1.75$

- نحدد الموقع $1 < 1.57 < 2$

- نجد القيم المناظرة للترتيب الاول والثاني وهي على التتالي 5.6

الربيع الادنى= $\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}=5.5$

-ومعنى هذه النتيجة ان 25٪ من الطلبة تقل علاماتهم عن 5.5 وان 75٪ من الطلبة تزيد علاماتهم عن 5.5

2) لايجاد الربيع الاعلى

نجد ترتيب الربيع الاعلى = $\frac{75}{100}(ن+1)=\frac{3}{4}(6+1)=\frac{3}{4}\times 7=\frac{21}{4}=5.25$

نحدد موقع ترتيب المئين

$5 < 5.25 < 6$ أي ترتيب الربيع الاعلى يقع بين الترتيبين الخامس والسادس

نجد الارقام المناظرة للترتيب الخامس والسادس وهي على التوالي 9،10

∴ الربيع الاعلى= $\frac{9+10}{2}=\frac{19}{2}=9.5$ وتفسير النتيجة كما يلي

أي ان 75٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 9.5 وان 25٪ من الطلاب علاماتهم تزيد عن 9.5.

ب) ايجاد الربيعات من البيانات المبوبة

ويمكن ايجادها بطريقتين

1) الطريقة الحسابية　　　　2) الطريقة البيانية

1) الطريقة الحسابية

وتقسم الى طريقتين:

1) الطريقة الحسابية الاولى　　　　2) الطريقة الحسابية الثانية

ان الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين هي نفس الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط والمئينات ولذلك لاداعي لذكرها مرة أخرى.

مثال: البيانات التالية تمثل الانفاق الشهري لعشر اسر موزعة كما في الجدول(2−20):

فئات الانفاق الشهري	79−70	89−80	99−90	109−100
عدد الاسر	2	3	1	4

جدول (2 − 20)

المطلوب ايجاد مايلي:

أ) ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية.

ب) ايجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية.

جـ) ايجاد الربيع الادنى والاعلى بالطريقة البيانية

الحل: أ) ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والحسابية الثانية

نشكل جدول تكراري متجمع صاعد (2 − 21)

فئات الانفاق الكلي	عدد الاسر	الفئات الفعلية	نهاية الفئات	تكرار المتجمع صاعد
69–60	∵	69.5–59.5	69.5>	∵
79–70	2	79.5–69.5	79.5>	2
89–80	3	89.5–79.5	89.5>	5
99–90	1	99.5–89.5	99.5>	6
109–100	4	109.5–99.5	109.5>	10
المجموع	10			

جدول (2 – 21)

نجد ترتيب الربيع الأدنى $= \frac{25}{100} \times$ مجموع التكرارات

$$= \frac{25}{100} \times 10 = 2.5$$

فئة الربيع الادنى وهي التي تقع اسفل السهم مباشرة= 79.5–89.5

الحد الادنى للفئة الربيعية=79.5

طول الفئة الربيعية=89.5–79.5=10

التكرار المتجمع السابق=2

التكرار المتجمع اللاحق=5

ايجاد الربيع الادنى حسب العلاقة.

الربيع الادنى $= 79.5 + \frac{2.5-2}{5-2} \times 10$

$$= 79.5 + \frac{0.5}{3} \times 10 = 79.5 + \frac{5}{3} = 79.5 + 1.67 = 81.17$$

ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

الفئة الربيعية **التكرار المتجمع الصاعد**

$$10\begin{bmatrix} 79.5 \\ \text{الربيع الادنى} \\ 89.5 \end{bmatrix} \quad \text{س} \qquad 3\begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 5 \end{bmatrix} 0.5$$

$$\frac{\text{س}}{10} = \frac{0.5}{3}$$

نتيجة للضرب التبادلي فان 3س=5 ⇐ س = 1.67

الربيع الادنى = الحد الادنى للفئة الربيعية+ قيمة س

= 81.17=1.67+79.5

2) ايجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية

ايجاده بالطريقة الاولى

نجد ترتيب الربيع الادنى = $\frac{75}{100} \times 10 = \frac{750}{100} = 7.5$

الفئة الربيعية=99.5−109.5

الحد الادنى=99.5

طول الفئة = 109.5−99.5=10

التكرار المتجمع الصاعد السابق=6

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق=10

نجد الربيع الاعلى من العلاقة التالية:

الربيع الاعلى = $99.5 + \frac{7.5-6}{10-6} \times 10 = 99.5 + \frac{1.5}{4} \times 10$

$$=99.5+\frac{15}{4}=99.5+3.75=103.25$$

ايجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

الفئة الربيعية		التكرار المتجمع الصاعد
99.5		6
الربيع الاعلى (10)	س	7.5 (1.5) (4)
109.5		10

$$\frac{س}{10}=\frac{1.5}{4}$$

بالضرب التبادلي 4س=15

$$س=\frac{15}{4}=3.75$$

الربيع الاعلى = الحد الادنى للفئة الربيعية + قيمة س

$$= 3.75 + 99.5 = 103.25$$

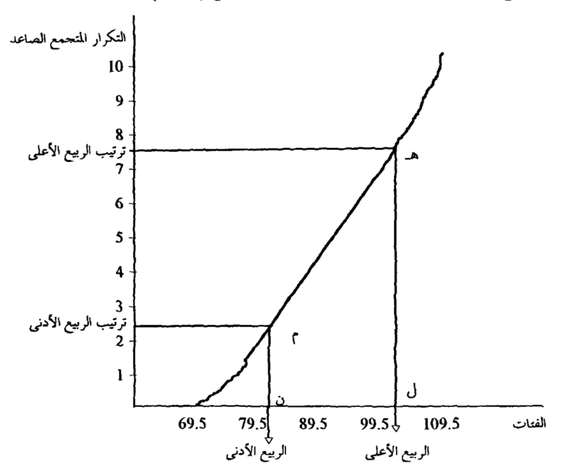
ب- طريقة ايجاد الربيع الادنى والاعلى بيانيا

وهذا هو المطلوب(3) من مطاليب السؤال السابق ونتبع الخطوات التالية:

- نرسم محورين متعامدين . ثم نرصد على المحور الافقي الحدود العليا للفئات وعلى المحور الرأسي التكرارات المتجمعة الصاعدة.
- نعين النقاط التي احداثيها الاول يمثل الفئات والاحداثي الثاني يمثل التكرار.
- نصل بين النقاط المعينة بخط منحن فيتكون لدينا منحنى تكراري متجمع صاعد.
- نجد ترتيب الربيع الادنى ثم نعينه على المحور الرأسي ونقيم من نقطة التعين عموداً

على المحور الرأسي فيقطع المنحنى في نقطة مثل م.

- ننزل من النقطة م عموداً على المحور الافقي فيقطعه في نقطة فيتعين عندها قيمة الربيع الاعلى وفي مثالنا نجد من الرسم ان قيمة الربيع الادنى هي 81.17 وقيمة الربيع الاعلى هو 103.25تقريبا انظر الى الشكل (2 – 1)



شكل (2 – 1)

2 - 4-5) العشيرات:

مفهوم العشيرات: هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى عشرة اقسام متساوية وكل قسم يسمى عشير. فمثلا العشير الثالث هو القيمة التي

يسبقها $\frac{3}{10}$ البيانات ويليها $\frac{7}{10}$ من البيانات على فرض أن القيم مرتبة ترتيبا تصاعديـا. والوسيط هو العشير الخامس ويوجد تسعة عشيرات.

اما كيفية ايجاد العشيرات فيمكن صياغتها كما يلي:-

أ- البيانات غير المبوبة: نتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات تصاعديا
- نجد ترتيب العشير
- نحدد الترتيب الادنى والترتيب الاعلى لترتيب العشير
- نجد القيم المناظرة للترتيبين
- فيكون العشير هو الوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين

مثال: البيانات التالية تمثل علامات 8 طلاب من 50 في مادة الاحصاء

41، 32، 46، 28، 36، 20، 35، 23

والمطلوب ايجاد:

1) العشير الثالث مع تفسير النتيجة

2) العشير الثامن مع ا=تفسير النتيجةز الحل:

الحل: 1) لايجاد العشير الثالث نتبع الحطوات التالي:

- ترتب البيانات ترتيبا تصاعديا

20	23	28	32	35	36	41	46	القيم.
(1).	(2).	(3).	(4).	(5).	(6).	(7).	(8).	الترتيب

ترتيب العشير الثالث= $\frac{30}{100}(ن+1) = \frac{30}{100}(8+1) = \frac{30}{100}\times 9 = \frac{270}{100} = 2.7$

$2 < 2.7 < 3$ ترتيب العشير الثالث يقع بين الترتيب الثاني والثالث

نجد القيمتين المناظرتين للترتيب الثاني والثالث وهما على التوالي 23،28

∴ العشير الثالث= $\frac{28+23}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

تفسير النتيجة (25.5) أي أن 30٪ من عدد الطلاب تقل علاماتهم عن 25.5 وان 70٪ من عدد الطلاب تزيد علاماتهم على 25.5

ولايجاد العشير الثامن:

نستفيد من ترتيب البيانات في التمرين السابق

ترتيب العشير الثامن=

$$\frac{80}{100}(ن+1) = \frac{80}{100}(8+1) = \frac{80}{100}\times 9 = \frac{720}{100} = 72$$

8>7.2>7 نلاحظ ان ترتيب العشير الثامن يقع بين الترتيب السابع والثامن.

نجد القيمتين المناظرتين للترتيبين السابع والثامن وهما على التوالي 41،46

العشير الثامن= $\frac{46+41}{2} = \frac{87}{2} = 43.5$

تفسير النتيجة(43.5) أي أن 80٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 43.5 و20٪ من الطلاب علاماتهم تزيد عن 43.5

ب) العشيرات للبيانات المبوبة

وتوجد بطريقتان

1- الطريقة الحسابية الاولى   2- الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين متطابقة تماما مع الخطـوات لهـاتين الطريقتـين في كـل مـن الوسيط، والمئين، والربيعات.

مثال:– أوجد العشير الثالث للبيانات المبوبة في الجدول (2 – 22)

الفئات	6–4	9–7	12–10	15–13	المجموع
التكرار	3	4	6	5	18

جدول (2 – 22)

الحل: لايجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

– نشكل جدول الحل (2 – 23)

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
6–4	3	6.5–3.5	6.5 >	3
9–7	4	9.5–6.5	9.5>	7
12–10	6	12.5–9.5	12.5>	13
15–13	5	15.5–12.5	15.5>	18

جدول (2 –23)

– ترتيب العشير الثالث(م30) = $\frac{30}{100} \times 18 = 5.4\frac{540}{100} \approx 5$

الفئة العشيرية= 9.5–6.5

الحد الادنى للفئة العشيرية6.5

طول الفئة العشيرية=9.5–6.5=3

التكرار المتجمع السابق=3

التكرار المتجمع اللاحق=7

نطبق العلاقة التالية:

$$\text{العشير} = \text{الحد الأدنى للفئة العشيرية} + \frac{\text{ترتيب العشير} - \text{التكرار المتجمع السابق لترتيب العشير}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق لترتيب العشير} - \text{التكرار المتجمع المسبق لترتيب العشير}} \times \text{طول الفئة}$$

العشير الثالث= $6.5 + \frac{3-5.4}{3.-7}3 = 6.5 + \frac{2.4}{4} = 6.5 + \frac{7.2}{4} = 6.5 + 1.8 = 8.3$

ايجاد العشير الثالث م$_{30}$ بالطريقة الحسابية الثانية

بناء على الجدول المشكل اعلاه نقوم بكتابة العمودين التالين:

الفئة العشيرية		التكرار المتجمع الصاعد	
3	6.5 العشير الثالث 9.5	س	4 [3، 5.4، 7] 2.4

$$\frac{س}{3} = \frac{2.4}{4}$$

بالضرب التبادلي نحصل على 4س=7.2

$$س = \frac{7.2}{4} = 1.8$$

العشير الثالث= الحد الادنى للفئة العشيرية+قيمة س

= 8.3=1.8+6.5

وتفسير النتيجة(8.3)هي أن 30٪ من مجموع البيانات تقل عن 8.3و70٪ من البيانات تزيد على هذه القيمة.

2 – 5) المنوال:

تعريف: المنوال هو القيمة الاكثر تكراراً او شيوعاً بين قيم المجموعة.

2 – 5–1) طرق ايجاد المنوال:

أ– ايجاد المنوال للبيانات الغير المبوبة.

1) اذا لم يتكرر اياً من القيم فلا يوجد منوالاً

مثال: لدينا قيم المشاهدات 7، 9، 11، 12، 15 أوجد منوال هذه القيم .

الحل: لايوجد منوال لهذه القيم حيث ان اياً من القيم لم تتكرر.

2) اذا تكرر أحدها فيكون هناك منوالاً واحداً.

مثال: اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 7، 11، 5، 7، 11، 7، 9

الحل: القيمة الاكثر تكرارا هي القيمة 7.

اما اذا كان لقيمتين نفس العدد من التكرار فيكون للقيم منوالان وهكذا يزداد المنوالات بزيادة العدد المتساوية التكرار على ان يبقى ولو على الاقل قيمة واحدة غير متكررةمن بين القيم.

مثال: اوجد المنوال او المنولان لقيم المشاهدات التالية

11،4،9،17،9،4

الحل: يوجد منولان هما 9،4 لان لهما نفس التكرار

ايجاد المنوال للقيم المبوبة

لايجاد المنوال هناك طريقتان

أ) الطريقة الجبرية

ب) الطريقة الهندسية.

نبدأ بالطريقة الحبرية وهذه تقسم الى قسمين

1) طريقة الفروق لبيرسون.

نتبع الخطوات التالية.

- نجد الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل الاكثر تكراراً من بين الفئات.
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها وليكن $ف_1$
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها ولتكن $ف_2$
- نجد المنوال من العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times ط \text{(طول الفئة المنوالية)}$$

مثال: البيانات التالية تمثل الدخل الشهري لمائة أسره موزعة كما في الجدول (2-24).

فئات الدخل	0-99	100-109	110-119	120-129	130-139	المجموع
عدد الاسر	15	25	37	13	10	100

جدول (2- 24)

والمطلوب ايجاد المنوال بطريقة الفروق(بيرسون)

الحل: يمكن تكوين الجدول (2 - 25) والمحتوى على الفئات الفعلية.

فئات الدخل	تكرار الفئة
89.5-99.5	15
99.5-109.5	25
109.5-119.5	37
119.5-129.5	13
129.5-139.5	10
المجموع	100

← الفئة المنوالية التي تقابل الأكثر تكرارا (37)

جدول (2 – 25)

- نجد الفئة المنوالية وهي 109.5-119.5

نجد الحد الادنى للفئة المنوالية= 109.5

نجد $ف_1$= 37-25=12

نجد $ف_2$ = 37-13=24

نجد المنوال من العلاقة السابقة.

$$\text{المنوال} = 109.5 + \frac{12}{12+36} \times 10$$

$$= 109.5 + \frac{12}{48} \times 10 = 109.5 + \frac{120}{48}$$

$$= 109.5+2.5= 112$$

2) طريقة الرافعة

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

نحدد الفئة المنوالية وهي التي تقابل الاكثر تكراراً.

نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية.

نجد $ك_1$: التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية.

نجد $ك_2$: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية.

نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_2}{ك_1+ك_2} \times \text{طول الفئة}$$

مثال: اوجد المنوال بطريقتين

أ) بطريقة الفروق.

ب) بطريقة الرافعة

للبيانات المبوبة بالجدول (2 – 26).

الفئات	20-	25-	30-	35-	40-	المجموع
التكرار	3	12	31	10	4	65

جدول (2 – 26)

الحل: نكون الجدول التالي بشكل رأسي (2 – 27).

الفئات	التكرار
20-	3
25-	12
30-	31
35-	10
40-	4
المجموع	60

أ- بطريقة الفروق

- نجد الفئة المنوالية = 30
- نجد الحد الادنى للفئة المنوالية=30
- نجد $ف_1$=31-12=19
- نجد $ف_2$ = 31-10=21
- نجد المنوال من العلاقة.

$$\text{المنوال} = 30 + \frac{19}{21+19} \times 5$$

$= 30 + \frac{19}{40} \times 5 = 30 + \frac{95}{40}$

$= 30 + 2.375 = 32.375$

ب- المنوال بطريقة الرافعة

- نجد الفئة المنوالية=30

- نجد الحد الادنى للفئة المنوالية= 30

- نجد $ك_1$ = 12

- نجد $ك_2$ = 10

- نطبق العلاقة التالية.

المنوال= الحد الادنى للفئة المنوالية+ $\frac{ك_2}{ك_1+ك_2}$×ل

المنوال= $30 + \frac{10}{12+10} \times 5 = 30 + \frac{50}{22} = 30 + 2.27 = 32.27$

خصائص المنوال.

1- لا يتأثر بالقيم لمتطرفة.

مثال: اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 3،5،90،27،3،5،7،3.

الحل: المنوال= 3 وهذا يعني ان المنوال لم يتأثر بالقيم المتطرفة .

2- يوجد بسهولة لانه من التعريف هو القيمة الاكثر تكراراً

3- يمكن ايجاده من الجداول المفتوحة.

4- يمكن ايجاده بالرسم كما ذكرنا في الطريقة الثالثة لايجاده.

العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

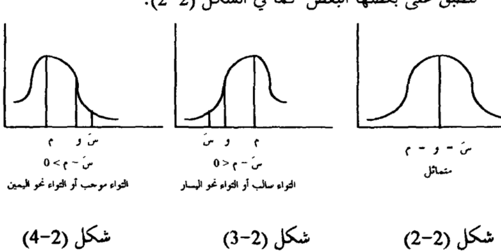
1) في التوزيعات وحيدة المنوال والملتوية التواء بسيطاً والى الجهة اليمنى فان ترتيب المقاييس يكون

المنوال- الوسيط- الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل (2-4).

2) في التوزيعات وحيدة المنوال والملتوية التواءاً بسيطا والى الجهة اليسرى فان ترتيب المقاييس يكون الوسط الحسابي- الوسيط- المنوال كما في شكل (2-3) وبصيغة رموز

سَ = و = م

3) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتماثلة فان الوسط الحسابي والمنوال والوسيط تنطبق على بعضها البعض كما في الشكل (2-2).



شكل (2-4) شكل (2-3) شكل (2-2)

ونستطيع ان نخرج بالعلاقات الخطية التالية التي تربط المقاييس الثلاث بعضها ببعض.

1- اذا كان التوزيع متماثلاً فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث

الوسط الحسابي= الوسيط= المنوال

............(2-21)

2- اذا كان التوزيع غير متماثل فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث هي:

الوسط الحسابي− المنوال= 3(الوسط الحسابي− الوسيط) .... (2−22)

أي $\bar{\text{س}} - \text{م} = 3(\bar{\text{س}} - \text{و}) = \frac{3}{2}(\text{و} - \text{م})$ وكذلك $\bar{\text{س}} = \frac{3\text{و} - \text{م}}{2}$ ....(2−23)

مثال : اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع غير متماثل هو 50 وكان الوسيط لهذا التوزيع هو 60 اوجد المنوال لهذا التوزيع.

الحل: من العلاقة اعلاه

$50 - \text{م} = -30 \Leftarrow \text{م} = 50+30 = 80$

أمثلة اضافية على المنوال

مثال: اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

7، 19، 10، 12، 13

الحل: لا يوجد منوال لهذه المشاهدات لان ايا من القيم لم يتكرر.

مثال: اوجد المنوال ان امكن لقيم المشااهدات التالية.

17، 19، 10، 25، 25، 17، 19، 17.

الحل: المنوال= 17 لأن هذا الرقم له أكبر تكرار

مثال: اوجد المنوال او المنوالات لقيم المشاهدات التالية:

7، 17، 19، 11، 19، 11.

الحل: يوجد منوالان هما 19، 11.

مثال: اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

20،17،15،20،17،15

الحل: لا يوجد منوال لان جميع القيم لها نفس التكرار.

مثال: البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبينا كما في الجدول (2 – 28):-

الفئات	التكرار
-70	8
-80	22
-90	40
-100	25
-110	5
	100

جدول (2 – 28)

المطلوب: ايجاد المنوال:

أ) بطريقة الفروق

ب) بطريقة الرافعة

جـ) بطريقة المنوال التقريبي.

الحل: أ) طريقة بيرسون

-1 $ف_1$ = 40 – 22 = 18

$ف_2$ = 40 – 25 = 15

الفئة المنوالية = -90 وحدها الادنى =90

قيمة المنوال $= 90 + \frac{18}{15+18} \times 10 = 90 + \frac{180}{33}$

$= 90 + 5.45 = 95.45$

ب) طريقة الرافعة

قيمة المنوال$= 90 + \frac{25}{22+25} \times 10$

$= 90 + \frac{250}{47} = 90 + 5.32 = 95.32$

جـ) المنوال التقريبي $= \frac{100+90}{2} = \frac{190}{2} = 95$

مثال: اذا كان الوسط الحسابي= 45 لقيم من المشاهدات وكان الوسيط لها= 32 أوجد المنوال لها.

الحل: من العلاقة أعلاه نجد أن:

45 – م = 3 (45 – 32)

45 – م = 135 – 96

45 – م = 39

45 – 39 = م

6 = م

مثال: اذا كانت مجموعة من المشاهدات تتوزع توزيعاً طبيعياً متماثلاً وسطه الحسابي= 36 أوجد المنوال لهذه المشاهدات.

الحل: التوزيع متماثل.

∴ $\bar{س}$ = و = م = 36

ب- الطريقة الهندسية:

وهنا نتبع الخطوات التالية.

- نرسم محورين متعامدين المحور الافقي يمثل الفئات الفعلية والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
- نرسم المستطيل الذي قاعدته الفئة المنوالية وارتفاعه الاكثر تكراراً
- نرسم مستطيل يلاصق المستطيل الاول ويسبقه بحيث ان قاعدته الفئة السابقة للفئة المنوالية وارتفاعه يقابل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالي.
- نرسم مستطيل ملاصق وقاعدته الفئة اللاحقة للفئة المنوالية وارتفاعه تكرار الفئة اللاحقة.
- نصل أ مع د كما في الشكل ثم ب مع جـ فيتقاطع الخطان في ن.
- ننزل عمود من ن على المحور الافقي فيتقاطع معه في م فتكون القيمة المناظرة للنقطة هي قيمة المنوال

6-2) اثر التحويلات الخطية على مقياس النزعة المركزية.

التحويل الخطي: هو اعطاء صورة جديدة لمفهوم سابق وفق علاقة ولعل مقاييس النزعة المركزية من بين القيم التي تأخذ اوضاعا جديدة فيما اذا وقعت تحت تأثير تحويل وما تتأثر تأثيرا مباشراً.

مما حدا بنا الى وضع قيمتين لكل مقياس من هذه المقاييس القيم قبل خضوعها لتحويل ما والقيمة الثانية هي قيمة المقياس بعد تعرضه لهذا التحويل.

نظرية: ليكن سَ، و، وم، م٪ تمثل المقاييس على التوالي الوسط الحسابي، المنوال، المتين واذا كان ق(س)=أس+ب تحويلا خطيا اثر على هذه المقاييس فان قيم هذه المقاييس بعد تأثير التحويل تصبح.

ص سَ= أ. سَ +ب
ص و= أ.و+ ب
ص مَ=أ. م+ب
ص م٪= أ.م٪+ب

(24-2) ....

مثال: اذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي70، ووسيطها 60والمنوال 50والمتين الستون 55 فقدمت هذه المقاييس الى تعديلات خطية حسب المعادلة ص=0.4س+8 حيث س هي العلامة قبل التعديل وص هي العلامة بعد العديل . والمطلوب ايجاد قيم المقاييس اعلاه بعد التعديل.

الحل: ص $\bar{س}$ = 8+70×0.4

=28+8=36 وهذه قيمة الوسط الحسابي بعد التعديل

ص و =8+60×0.4

=24+8=32 وهذه قيمة الوسيط بعد التعديل

ص م =8+50×0.4

=20+8=28 وهذه قيمة المنوال بعد التعديل

ص م٪ =8+55×0.4

=22+8=30 وهذه قيمة المئين الستون

2 - 7) الوسط الهندسي:

تعريف: الوسط الهندسي لمجموعة من القيم هو الجذر النوني لحاصل ضرب مجموعة من القيم عددها ن .

ولايجاد الوسط الهندسي

أ- للبيانات غير المبوبة.

اذا كان لدينا القيم $س_1$ ، $س_2$ ،...... س ن فـان الوسـط الهندسي لهـذه المشـاهدات والذي سنرمز له بالرمز

$$هـ = \sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times \ldots\ldots \times س_ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-25)$$

وباستخدام اللوغاريتمات لو هـ= $\frac{1}{ن}\sum$ لو س

مثال: اذا كان لدينا القيم 5، 10،20 فأوجد الوسط الهندسي لهذه المشاهدات.

الحل: $هـ = \sqrt[3]{5 \times 20 \times 10} = \sqrt[3]{1000} = 10$

أما اذا كان عدد المشاهدات اكبر من ذلك فاننا نستعين بجداول اللوغاريتمات

ب- ايجاد الوسط هندسي للبيانات المبوبة(التوزيعات التكرارية)

اذا كان لدينا القيم $س_1$ مكررة $ك_1$ من المرات ، $س_2$ مكررة $ك_2$ من المرات،..... $س_م$ $ك_م$ من المرات فان الوسط الهندسي هـ في هذه الحالة

$$هـ = \sqrt[\sum ك]{س_1^{ك_1} \times س_2^{ك_2} \times ...... \times س_ى^{ك_ن}} \quad .... (2-26)$$

$$لو\ هـ = \frac{1}{\sum ك}(ك_1 \ لو\ س_1 + ك_2 \ لو\ س_2 + ... + ك_ن \ لو\ س_ن)$$

2-8) الوسط التوافقي:

تعريف: الوسط التوافقي وهو وسط يحسب معدلات زمنية وهو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم وسنرمز له بالرمز ق ولايجاده:

أ- ايجاد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات غير المبوبة: فاذا كانت $س_1$، $س_2$،...،$س_ن$ قيم مشاهدات فان الوسط التوافقي

$$ق = \frac{ن}{\frac{1}{س_1} + \frac{1}{س_2} + ... + \frac{1}{س_ن}} = \frac{ن}{\sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{س_ر}} \quad .... (2-27)$$

مثال: اوجد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات التالية:

25،10،3،12،8

الحل : الوسط التوافقي ق = $\frac{5}{\frac{1}{25}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}}$

$$= \frac{5}{0.4+0.100+0.333+0.083+0.125} = \frac{5}{0.681} = 7.342$$

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 180، 250، 310

المطلوب ايجاد 1) الوسط الهندسي 2) الوسط التوافقي لهذه البيانات.

الحل: 1) بما ان الارقام كبيرة نستعين بقاعدة اللوغاريتمات

هـ = $\sqrt[3]{310 \times 250 \times 180} = \frac{1}{3}(310\times250\times180)$

لو هـ = $\frac{1}{3}(2.4914+2.3979+2.2553)$

لو هـ = $\frac{7.1446}{3} = 2.3815$

∴ هـ = 240.7317

2) لايجاد الوسط التوافقي

ق = $\frac{3}{\frac{1}{310}+\frac{1}{250}+\frac{1}{180}} = \frac{3}{0.003+0.004+0.005} = \frac{3}{0.012}$

∴ ق = 250

ب- ايجاد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات المبوبة

اذا كانت $س_1$،$س_2$،....، $س_ن$ قيم مشاهدات وتكراراتها المقابلة $ك_1$، $ك_2$، ...$ك_ن$ فان الوسط التوافقي لقيم هذه المشاهدات هو

$$ق = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} \frac{ك_ر}{س_ر}} \quad .... (28-2)$$

9-2) الوسط التربيعي

تعريف: الوسط التربيعي هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات القيم. وسنرمز له بالرمز ت.

أ- إيجادالوسط التربيعي لقيم المشاهدات غير المبوبة:

اذا كان $س_1$، $س_2$،.... $س_ن$ فان الوسط التربيعي لقيم هذه المشاهدات

$$ت = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2}{ن}} \quad .... (29 - 2)$$

مثال: اوجد الوسط التربيعي لقيم المشاهدات التالية

3، -5، 5، 0، -3

الحل : بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$ت = \sqrt{\frac{(3)^2+(-5)^2+(5)^2+(0)^2+(-3)^2}{5}} = \sqrt{\frac{9+25+25+9}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{68}{5}} = \sqrt{13.6} \quad \therefore \quad ت = +3.69$$

ب- ايجاد الوسط التربيعي للبيانات المبوبة

يمكن إيجاد الوسط التربيعي للبيانات المبوبة من العلاقة التالية:

$$ت = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}} \quad \text{.................. (2-30)}$$

والآن لنتناول مثال يشمل ايجاد الأوساط المختلفة.

مثال: البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (2-29):

فئات الأجر	40-	50-	60-	70-	80-
عدد العمال	8	22	40	25	5

جدول (2-29)

المطلوب: إيجاد ما يلي:

1- الوسط الحسابي لهذه البيانات 2- الوسط الهندسي 3- الوسط التوافقي

4- الوسط التربيعي 5- مقارنة هذه الأوساط مع بعضها البعض.

الحل: نكون الجدول (2 - 30):

فئات الأجر	التكرار $ك_ر$	$س_ر$	$س_ر ك_ر$	$\frac{1}{س_ر}$	$\frac{1}{س_ر} \times ك_ر$	لو $س_ر$	$ك_ر$ لو $س_ر$	$س_ر^2$	$س_ر^2 ك_ر$
40-	8	45	360	0.022	0.176	1.6532	13.2256	2025	16200
50-	22	55	1210	0.018	0.396	1.7404	38.2888	3025	66550
60-	40	65	2600	0.015	0.600	1.8129	72.516	4225	169000
70-	25	75	1875	0.013	0.325	1.8751	46.8775	5625	140625
80-	5	85	425	0.012	0.060	1.9294	9.647	7225	36125
المجموع	100		6470		1.557		180.5549		428500

جدول (2-30)

ثم بالاستفادة من الجدول أعلاه نجيب على متطلبات المسألة.

1) $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{6470}{100} = 64.70$

2) $لو هـ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر لو س_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{180.5549}{100} = 1.805549$

$\therefore$ هـ = 63.90708

3) $ق = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} \frac{ك_ر}{س_ر}} = \frac{100}{1.557} = 64.2261$

4) $ت = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س^2_ر ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}} = \sqrt{\frac{428500}{100}} = \sqrt{4285} = 65.4599$

5) من النتائج أعلاه نلاحظ أن:

ت > $\bar{س}$ > ق > هـ

مثال: اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات التالية:

2، 4، 8

$هـ = \sqrt[3]{2 \times 4 \times 8} = \sqrt[3]{64} = 4$

مثال : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

$س_1$ـ12 ، $س_2$= 4 ، $س_3$=28، $س_4$= 18 ، $س_5$= 21

اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات

هـ = $\sqrt[5]{21 \times 18 \times 28 \times 4 \times 12}$

$=(21\times18\times28\times4\times12)^{\frac{1}{5}}$

لو هـ = $\frac{\text{لو}12+\text{لو}4+\text{لو}28+\text{لو}18+\text{لو}21}{5}$

$= \frac{1.322+1.255+1.447+0.602+1.079}{5}$

لو هـ = 1.141

هـ = 13.835

مثال: اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات التالية

47، 51، 62، 89،17

الحل: لو هـ= $\sqrt[5]{17\times89\times62\times51\times47} = (17\times89\times62\times51\times47)^{\frac{1}{5}}$

لو هـ= $(17\times89\times62\times51\times47)^{\frac{1}{5}}$

∴ هـ=46.773

مثال: اوجد الوسط الهندسي لقيم الشاهدات التالية:

78، 51، 60، 14، 38

الحل: هـ= $\sqrt[5]{38\times14\times60\times51\times78}$

$= (38\times14\times60\times51\times78)^{\frac{1}{5}}$

لو هـ= $\frac{1.5797+1.146+1.778+1.707+1.839}{5}$

لوهـ= لو 1.620

هـ= 41.686

مثال: اوجد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات التالية 3،4،9

الحل: $ق = \frac{3}{\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{9}}\quad \frac{3}{0.333\ \ 0.25\ \ 0.11}\quad \frac{3}{0.693}\quad 4.33$

مثال : اوجد الوسط التربيعي لقيم المشاهدات التالية.

0، 2، -3، 4، 2

الحل: $ت = \sqrt{\frac{0\ \ 4\ \ 9\ \ 16\ \ 4}{5}}\quad \sqrt{\frac{33}{5}}\quad \sqrt{6.6}\quad 2.57$

مثال: البيانات التالية: تمثل فئات الاعمار لخمسين شخصا مبينة كما في جدول (2-31):

فئات الأعمار	2-	4-	6-	8-
التكرار	7	10	13	18

جدول (2 – 31)

المطلوب: ايجاد الوسط التربيعي

الحل: نكون جدول الحل (2 – 32)

فئات الاعمار	$ك_ر$	$س_ر$	$س_ر^2$	$ك_ر س_ر^2$
2-	7	3		63
4-	10	5	25	250
6-	13	7	49	637
8-	18	9	81	1458
	50			2650

جدول (2 – 32)

وبالاستفادة من الجدول أعلاه نجد أن:

$$ت = \sqrt{\frac{2650}{50}}$$

$$= \sqrt{53} = 7.28$$

ايجاد العلاقة بين الأوساط التربيعي والحسابي والهندسي والتوافقي:

مثال: اذا كان لدينا أ ، ب عددان فأثبت أن:

$$\sqrt{\frac{أ^2+ب^2}{2}} > \frac{أ+ب}{2} > \sqrt{أ.ب} > \frac{2}{\frac{1}{أ}+\frac{1}{ب}}$$

حيث أن $ت = \sqrt{\frac{أ^2+ب^2}{2}}$ ، $\overline{س} = \frac{أ+ب}{2}$ ، هـ $= \sqrt{أ.ب}$ ، ق $= \frac{2}{\frac{1}{أ}+\frac{1}{ب}}$

الاثبات: على اعتبار أن:

$\sqrt{\frac{أ^2+ب^2}{2}} > \frac{أ+ب}{2}$ بتربيع كلا الطرفين:

$\frac{أ^2+ب^2}{2} > \left(\frac{أ+ب}{2}\right)^2$ وبفك قوس الطرف الأيسر

$$\frac{أ^2+ب^2}{2} > \frac{أ^2+2أب+ب^2}{4}$$

$$\frac{2\times(أ^2+ب^2)}{2\times 2} - \frac{أ^2+2أب+ب^2}{4} \overset{؟}{>} صفر$$

$$\frac{2أ^2+2ب^2-أ^2-2أب+ب^2}{4} \overset{؟}{>} صفر$$

$$\frac{أ^2-2أب+ب^2}{4} \overset{؟}{>} صفر$$

$$\left(\frac{أ-ب}{2}\right)^2 \overset{؟}{>} صفر$$

$\therefore \left(\frac{أ-ب}{2}\right)^2 >$ صفر وهذا لأن مربع أي عدد دائماً موجب ويتم المطلوب.

هل $\bar{س} >$ هـ أي أن:

$\frac{أ+ب}{2} \overset{?}{>} \sqrt{أ+ب}$ بتربيع كلا الطرفين:

$\left(\frac{أ+ب}{2}\right)^2 \overset{?}{>} أ\ ب$

$\frac{أ^2+2أب+ب^2}{4} - \frac{4 \times أب}{1 \times 4} \overset{?}{>}$ صفر

$\frac{أ^2+2أب+ب^2-4أب}{4} \overset{?}{>}$ صفر

$\frac{أ^2-2أب+ب^2}{4} \overset{?}{>}$ صفر

$\therefore \left(\frac{أ-ب}{2}\right)^2 >$ صفر وهذا لأن مربع أي عدد دائماً موجب ويتم المطلوب.

هل $\sqrt{أ+ب} \overset{?}{>} \frac{2}{\frac{1}{أ}+\frac{1}{ب}}$

$\sqrt{أ+ب} \overset{?}{>} \frac{2}{\frac{ب+أ}{أب}}$

$\sqrt{أ+ب} \overset{?}{>} \frac{2أب}{ب+أ}$ بتربيع كلا الطرفين:

$أ\ .\ ب \overset{?}{>} \frac{4أ^2\ ب^2}{أ^2+2أب+ب^2}$

$أ\ .\ ب - \frac{4أ^2\ ب^2}{أ^2+2أب+ب^2} \overset{?}{>}$ صفر

$\frac{أ.ب(أ^2+2أب+ب^2)-4أ^2\ ب^2}{أ^2+2أب+ب^2} \overset{?}{>}$ صفر

$$\frac{\text{أ.ب}(\text{أ}^2+2\text{أب}+\text{ب}^2-4\text{أب})}{\text{أ}^2+2\text{أب}+\text{ب}^2} \overset{?}{>} \text{صفر}$$

$$\frac{\text{أ.ب}(\text{أ}^2-2\text{أب}+\text{ب}^2)}{\text{أ}^2+2\text{أب}+\text{ب}^2} \overset{?}{>} \text{صفر}$$

$$\frac{\text{أ.ب}(\text{أ}-\text{ب})^2}{(\text{أ}+\text{ب})^2} > \text{صفر.}$$ ويتم المطلوب

والآن نتناول المثال التالي كتطبيق عددي على العلاقة أعلاه

مثال: من خلال البيانات التالية 2،4،6،8،10 اثبت صحة العلاقة التالية

$$\text{ت} > \bar{\text{س}} > \text{هـ} > \text{ق}$$

الحل: نجد ت $= \sqrt{\frac{2^2+4^2+6^2+8^2+10^2}{5}}$

$$= \sqrt{\frac{4+16+36+64+100}{5}} = \sqrt{45} = 6.71$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\text{هـ} = \sqrt[5]{2\times4\times6\times8\times10} = \sqrt[5]{3840} = (3840)^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{5}\ \text{لو}\ 380 = \frac{1}{5}(3.5843) = 0.717$$

$$\text{هـ} = 5.21$$

$$\text{ق} = \frac{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{5}{\frac{60+30+20+15+12}{120}} = \frac{5}{1} \div \frac{137}{120} = 5 \times \frac{120}{137} = \frac{600}{137} = 4.38$$

$$\therefore \text{ت} > \bar{\text{س}} > \text{هـ} > \text{ق.}$$

أي ان الوسط التربيعي> الوسط الحسابي > الوسط الهندسي> الوسط التوافقي

2 – 10) أمثلة متنوعة

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالي 7،15،8،9،8،13،10

المطلوب: ايجاد ما يلي:

1) الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 2) الوسيط لهذه القيم

3) المنوال لهذه القيم. 4) الوسط الهندسي

5) الوسط التوافقي 6) الوسط التربيعي 7) الربيع الثالث

8) بين ان الوسط التربيعي> الوسط الحسابي> الوسط الهندسي > الوسط التوافقي

الحل: 1) لايجاد الوسط الحسابي نجده من العلاقة التالية:

$$\bar{س} = \frac{10+13+8+9+8+15+7}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

2) لايجاد الوسيط نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

15	13	10	9	8	8	7
(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية

ترتيب الوسيط $= \frac{ن+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$

∴ قيمة الوسيط = 9 وهي القيمة المناظرة للترتيب الرابع

3) قيمة المنوال هي القيمة الاكثر تكراراً من بين القيم.

∴ قيمة المنوال= 8

4) نجد الوسط الهندسي من العلاقة.

$$\text{هـ} = \sqrt[7]{15\times13\times10\times9\times8\times8\times7} = (15\times13\times10\times9\times8\times8\times7)^{\frac{1}{7}}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{7}(1.1761+1.1139+1.000+0.9542+0.9031+0.9031+0.8451)$$

$$= \frac{1}{7}\times 6.8955 == 0.9851$$

$$\therefore \text{هـ} = 9.66205$$

5) الوسط التوافقي ق نجده من العلاقة التالية: $\text{ق} = \frac{1}{\sum_{ر=1}^{ن}\frac{1}{س_ر}}$

$$= \frac{7}{\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{13}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}}$$

$$= \frac{7}{0.125+0.07++0.08+0.1+0.11+0.125+.14} = \frac{7}{0.75} = 9.33$$

6) الوسط التربيعي نجد الوسط التربيعي من العلاقة التالية

$$\text{ت} = \sqrt{\frac{225+169+100+81+64+64+49}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{752}{7}} = \sqrt{107.4} = 10.36$$

7) لايجاد الربيع الثالث

نجد ترتيب م $_{75}$ من العلاقة التالية= $\frac{75}{100}(7+1) = \frac{3}{4}(8) = 6$

∴ قيمة الربيع الثالث القيمة المناظرة للترتيب السادس وهي 13

8) نلاحظ من الاجابات السابقة ان

$\text{ت} > \bar{\text{س}} > \text{هـ} > \text{ق}$

9.33<9.662<10<10.36

مثال: في شعبة مؤلفة من 100 طالب وجدان توزيع الطلاب حسب علاماتهم كما هو مبين في الجدول (2 – 33) .

فئات العلامات	عدد الطلاب
40–	8
50–	18
60–	20
70–	26
80–	16
90–	12
	100

جدول (2 – 33)

1) كون جدول تكراري نسبي ومئوي

2) مثل البيانات بواسطة المنحنى التكراري واذكر نوعه من حيث التماثل

3) اوجد عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 85 والذين تقل علاماتهم عن 65.

4) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80.

5) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67.

6) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57، 84.

7) ايجاد الوسط الحسابي بطرقه الثلاث.

8) ايجاد الوسيط لهذه البيانات.

9) ايجاد المئين التسعون ، $م_{75}$ ، $م_{25}$

لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80 نرسم المخطط التالي:

لحصر عدد الطلبة الذين ضمن هذه الفترة لنجده = 20 +26=46

∴ نسبة الطلاب= ——

5) لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67 نرسم المخطط التالي

نجد اولاً عدد الطلبة من 50 الى 52 ثم نطرح الناتج من عدد طلبة الفترة من 50 الى 60 على النحو التالي

10 18

2 س

$$س=\frac{18\times 2}{10}=3.6\cong 4$$

∴ عدد الطلبة في الجزء المطلوب اولاً = 18−4=14

نجد عدد الطلبة في المطلوب من 60 الى 67 على النحو التالي

10 20

7 س

$$س=\frac{20\times 7}{10}=14$$

∴ عدد الطلبة ضمن الفترة المطلوبة= 14+14=28 طالباً

$$نسبة الطلاب=\frac{28}{100}=028$$

10 18

7 $$س=\frac{18\times 7}{10}=\frac{126}{10}\cong 13$$

عدد الطلاب ضمن الفئة المطلوبة = 5+26+20+6=57 ∴ النسبة $\frac{57}{100}=057$

7) أ) بايجاد الوسط الحسابي بطريقة القانون العام

$$=\frac{7100}{100}=71$$

ب- ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي حيث أ الوسط الفرضي

8) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (2 – 34)

الفئات	التكرار	اقل من	التكرار المتجمع الصاعد
-40	8	50>	8
-50	18	60>	26
-60	20	70>	46
-70	26	80>	72
-80	16	90>	88
100-90	12	100>	100
	100		

جدول (2 – 34)

ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموعة التكرارات}}{2} = \frac{100}{2} = 50$

$70 + \frac{46-50}{46-72} \times 10 = 70 + \frac{4}{26} \times 10 = 70 + \frac{40}{26} = 70 + 1.54 = 71.54$

ترتيب م$_{90}$ = $90 + \frac{88-90}{88-90} \times 10 = 90 + \frac{20}{12} = 91.67$

ترتيب م 75= $= \frac{75}{100} \times 100 = 75$

الفئة المئينية من 80-90 وحدها الادنى 80

قيمة م$_{75}$ = $80 + \frac{72-75}{72-88} \times 10$

قيمة = $80 + \frac{30}{16} = 80 + 1.875 = 81.875$

تمارين عامة على الوحدة الثانية

س 1 : البيانات التالية تمثل فئات الاوزان لـ 100 طالب مبينة بالجدول (2 – 35) .

فئات الاوزان	عدد الطلاب
-40	8
-45	18
-50	44
-55	20
65-60	10

جدول (2–35)

المطلوب: ايجاد ما يلي

1) الوسط الحسابي باي طريقة 2) الوسيط باي طريقة

3) المنوال باي طريقة 4) الوسط التوافقي .

5) الوسط الهندسي 6) الوسط التربيعي. 7) الربيع الاول

8) تحقق من ان الوسط التربيعي> الوسط الحسابي > الوسط الهندسي > الوسط التوافقي.

س2 : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبوبة بالجدول (2 – 36) :

فئات الاجر	44-40	49-45	54-50	59-55	64-60
عدد العمال	10	20	40	20	10

جدول (2 – 36)

والمطلوب 1) رسم المنحنى التكراري لهذه البيانات

2) ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

3) ايجاد الوسيط لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

4) ايجاد المنوال لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

5) ايجاد $م_{10٪}$، م $_{25٪}$، $م_{85٪}$ ، $م_{75}$

6) الوسط الهندسي　　7) الوسط التوافقي　　8) الوسط التربيعي

س3: في عينة مكونة من (10) مفردات كانت قيم المشاهدات عن المتغير هي :-

$س_1$ = 4، $س_2$ =8، $س_3$ = 3، $س_4$=5، $س_5$=2، $س_6$=10، $س_7$=2، $س_8$= 4،

$س_9$= 4، $س_{10}$=8.

المطلوب 1) ايجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات

2) تعيين قيمة الوسيط.

3) حساب الوسط التوافقي لليم س +4 ،س $_6$، $س_{10}$ ـ8

5) حساب الوسط الهندسي للقيم س $_2$، $س_5$

6) حساب الوسط الحسابي للقيم $س_1$ ، $س_2$، $س_3$، $س_4$

7) حساب الوسط التربيعي للقيم $س_6$، $س_8$

8) حساب الوسط التوافقي لقيم المشاهدات $س_1$ ، $س_2$، $س_5$

9) ايجاد $لـ_1$، $لـ_2$ ، $ع_3$، $ع_2$، م $_{80}$ لهذه المشاهدات.

الفصل الثالث

مقاييس التشتت

3 – 1) مقدمة :

قبل الخوض في أهم مقاييس التشتت نرى لزاما توضيح فكرة التشتت واعطاء معنى واضح للتشتت.

معنى التشتت بشكل عام: هو تباعد القيم عن بعضها لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض اوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات متبعثرة.
- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير متبعثرة.
- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لايوجد تشتت

3 – 2) مقاييس التشتت

لعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

3 – 2 – 1) المدى ويقسم الى قسمين

1- المدى للبيانات غير المبوبة : وهو ابسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين اكبر قيمة

واصغر قيمة. ويمكن ايجاده من العلاقات التالية:

المدى = اكبر قيمة– اصغر قيمة .... (3 − 1)

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيراً وبما ان المدى يعتمد علىاكبر واصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيرا. لذا ينصح بحذف القيم المتطرفة الصغرى والكبرى. عن طريق استخدام مفاهيم عدة منها:

1) المدى المئيني = المئين الاعلى – المئين الادنى

= المئين التاسع والتسعون– المئين الاول = $م_{99} - م_{1}$ ......(3−2)

2) نصف المدى المئيني= $\frac{\text{المئين التاسع والتسعون – المئين الأول}}{2} = \frac{م_{99} - م_{1}}{2}$ ....(3−3)

3) المدى العشيري = العشير التاسع – العشير الاول = $ع_{9} - ع_{1}$

= $م_{90} - م_{10}$ ....(3−4)

4) نصف المدى العشيري= $\frac{\text{العشير التاسع – العشير الأول}}{2}$ ....(3−5)

نصف المدى العشيري = $\frac{م_{99} - م_{10}}{2}$ ....(3−6)

5) المدى الربيعي= الربيع الاعلى – الربيع الادنى

= $م_{75} - م_{25}$ ....(3−7)

6)نصف المدى الربيعي= $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$ ....(8-3)

$= \frac{م_{75} - م_{25}}{2}$

مثال: اذا كان لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 كما يلي:

39، 41، 21، 27، 34، 43، 25، 37، 28، 22

والمطلوب ايجاد

1- المدى المطلق 2- نصف المدى الربيعي

الحل : لايجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- نرتب المشاهدات ترتيبا تصاعديا

21	22	25	27	28	34	37	39	41	43
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

1) المدى المطلق = اعلى مشاهدة - اصغر مشاهدة

$= 43-21=22$

2) لايجاد نصف المدى الربعي.

أ) نجد الربيع الادنى او $م_{25}$ كما يلي :

- ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية

ترتيب الربيع الادنى = $= \frac{25}{100}(1+10) = \frac{275}{100} = 2.75$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22،25 تكون قيمة الربيع الاول= $\frac{1}{2}(25+22) = 23.5$

2) لايجاد الربيع الاعلى أي $م_{75}$ باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاعلى من العلاقة.

ترتيب الربيع الاعلى $= \frac{75}{100}(1+10) = \frac{825}{100} = 825$

نجد موقع الترتيب من بين التراتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

- فيكون قيمة الربيع الاعلى هي $= \frac{1}{2}(41+39) = 40$

وعليه فان نصف المدى الربيعي $= \frac{م_{75} - م_{25}}{2} = \frac{40 - 23.5}{2} = \frac{16.5}{2} = 825$

2) ايجاد المدى المطلق من البيانات المبوبة نتبع ما يلي:

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

المدى المطلق = الحد الاعلى الفعلي للفئة العليا – الحد الادنى للفئة الدنيا ......(3–9)

وعلاقة أخرى المدى المطلق = مركز الفئة العليا – مركز الفئة الدنيا ......(3–10)

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت لـه فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستتركز دراستنا على نوع منها

3–2) نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} \quad ......(3\text{–}11)$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{م_{75} - م_{25}}{2} \quad ......(3\text{–}12)$$

مثال : البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظف يعملون في احد المؤسسات مبوبة كما في الجدول (3-1)

فئات الرواتب	-90 99	-100 109	-110 119	-120 129	-130 139	-140 149	-150 159	المجموع
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (3 – 1)

المطلوب: أ- ايجاد المدى المطلق

ب- ايجاد نصف المدى الربعي

الحل: نكون جدول الحل (3 - 2)

فئات الرواتب	عدد الموظفين	الحدود الفعلية	الحد الاعلى الفعلي	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة
99-90	5	99.5-89.5	99.5 >	5	94.5
109-100	9	109.5-99.5	109.5 >	14	104.5
119-110	11	119.5-109.5	119.5>	25	114.5
129-120	17	129.5-119.5	129.5>	42	124.5
139-130	11	139.5-129.5	139.5>	53	134.5
149-140	5	149.5-139.5	149.5 >	58	144.5
159-150	2	159.5-149.5	159.5>	60	154.5
المجموع	60				

جدول (3 – 2)

المدى المطلق = الحد الاعلى للفئة العيا – الحد الادنى للفئة الدنيا

$70 = 89.5 - 159.5 \quad =$

المدى المطلق عن طريق مراكزالفئات

$60 = 94.5 - 154.5 \quad =$

ب– ايجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

نصف المدى الربيعي= $\frac{\text{الربيع الثالث - الربيع الأول}}{2}$ .... (13 – 3)

1) نجد الربيع الاول بالخطوات التالية

– نجد ترتيب الربيع الاول وهو

ترتيب الربيع الاول= $\frac{60\times 25}{100} = 15$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

– نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم.

وهي 119.5–109.5

– نجد الحد الادنى = 109.5.

– نجد الربيع الادنى من العلاقة التالية.

الربيع الادنى = $1095 + \frac{14-15}{14-25} \times 10 = 1095 + \frac{10}{11} = 1104$

2) نجد الربيع الثالث باتباع التالي

– نجد ترتيب الربيع الثالث كما يلي

- $60 \times \frac{75}{100} = 45$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

= (139.5−129.5)

= نحدد الحد الادنى =129.5

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

الربيع الثالث = $129.5 + \frac{45-42}{53-42} \times 10$

$= 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23$

نصف المدى الربيعي= $\frac{132.23 - 110.40}{2} = 10.915$

3-3) الانحراف المتوسط:

الانحراف المتوسط: مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي وسوف نتناول في كيفية ايجاده.

أ- البيانات غير المبوبة

لذا نتبع الخطوات التالية:

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات

- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$ حيث $ح_ر$ = هو انحراف كل مشاهدة عن وسطها الحسابي

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum |ح_ر|}{ن} = \frac{\sum |(س_ر - \bar{س})|}{ن} \qquad \text{.....(14-3)}$$

حيث ن عدد المشاهدات

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

10 ، 14 ، 16 ، 13 ، 7

الحل : لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{س} = \frac{10+14+16+13+7}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|ح_1| = |س_1 - \bar{س}| = |12-7| = 5$$
$$|ح_2| = |س_2 - \bar{س}| = |12-13| = 1$$
$$|ح_3| = |س_3 - \bar{س}| = |12-16| = 4$$
$$|ح_4| = |س_4 - \bar{س}| = |12-14| = 4$$
$$|ح_5| = |س_5 - \bar{س}| = |12-10| = 2$$

فيكون الانحراف المتوسط $= \frac{2+4+4+1+5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية

10 ، 8 ، 12 ، 13 ، 7

والمطلوب ايجاد الانحراف المتوسط لهذه المشاهدات

الحل: $\bar{س} = \frac{10+8+12+13+7}{5} = \frac{50}{5} = 10$

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 7-10 = -3$، $|ح_1| = |-3| = 3$

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 13-10 = 3$، $|ح_2| = |3| = 3$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 12-10 = 2$، $|ح_3| = |2| = 2$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 8-10 = -2$، $|ح_4| = |-2| = 2$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 10-10 = $ صفر، $|ح_5| = |0| = 0$

$\sum |ح_ر| = 3 + 3 + 2 + 2 + 0 = 14$

$أ.م = \frac{\sum |ح_ر|}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$

ب- اذا كانت البيانات مبوبة

لذا نتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات ولتكن $س_1$، $س_2$، ....، $س_ن$
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \qquad \text{.............(3-15)}$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات من العلاقة

$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$

- نجد حاصل ضرب $= |ح_ر| \times ك_ر$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{أ.م} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر| \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3-15)$$

مثال : البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مصنفة كما في الجدول (3-3)

فئات الاوزان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (3-3)

والمطلوب ايجاد الانحراف المتوسط لهذه الاوزان

الحل: نكون الجدول (3-4) التالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الاوزان	عدد الطلاب $ت_ر$	مركز الفئات $س_ر$	$س_ر \times ت_ر$	$\|ح_ر\| = \|س_ر - \bar{س}\|$	$\|ح_ر\|.ك_ر$
-40	7	42.5	297.5	|54.66-42.5| =12.16	7×12.16=85.12
-45	18	47.5	855.0	|54.66-47.5| =7.16	18×7.16=128.88
-50	40	52.5	2200	|54.66-52.5| =2.16	40×2.16=86.4
-55	20	57.5	1151	|54.66-57.5| =2.84	20×2.84=56.8
-60	10	62.5	625	|54.66-62.5| =7.84	10×7.84=78.4
70-65	5	67.5	337.5	|54.66-67.5| =12.84	5×12.84=64.2
المجموع	100		5466		499.8

جدول (3 – 4)

- نجد $\bar{س}$ من العلاقة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

$$= \frac{5466}{100} = 54.66$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر| \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{499.8}{100} = 4.998$

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية والمبوبة بالجدول (3-5)

فئات الأجور	-40	-50	-60	-70	90-80	المجموع
التكرار	10	20	50	5	15	100

جدول (3-5)

الحل: نكون جدول الحل (3-6)

فئات الاجور	التكرار	$س_ر$	$س_ر ك_ر$	$\|ح_ر\|$	$\|ح_ر\| ك_ر$
-40	10	45	450	19.5	19.5
-50	20	55	1100	9.5	190
-60	50	65	3250	5.	25.
-70	5	75	375	10.5	52.5
90-80	15	85	1275	20.5	307.5
	100		6450		770

جدول (3-6)

نبدأ بايجاد الوسط الحسابي $\bar{س}$

$$\bar{س} = \frac{6450}{100} = 64.5$$

$ح_1 = 45 - 64.5 = 9.5$، $|ح_ر| = 19.5$

$ح_2 = 55 - 64.5 = 9.5$، $|ح_ر| = 19.5$

$ح_3 = 65 - 64.5 = +5$، $|ح_ر| = 0.5$

$ح_4 = 75 - 64.5 = +10.5$، $|ح_ر| = 10.5$

$ح_5 = 85 - 64.5 = 20.5$، $|ح_ر| = 20.5$

$$أ.م = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر| \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{770}{100} = 7.7$$

3-4) التباين ومفهومه والانحراف المعياري.

تعريف التباين: هو مجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة واما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين.

ولايجاد التباين هناك حالتان

أ- اذا كانت البيانات غير المبوبة نتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + ... + س_ن}{ن}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي .

$ح_1 = س_1 - \bar{س}$

$ح_2 = س_2 - \bar{س}$

: : : : :

$ح_ن = س_ن - \bar{س}$

- نجد مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي أي.

$ح_1^2، ح_2^2، .... ح_ن^2$

- نجد التباين عن طريق العلاقة التالية.

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2}{ن} \quad .... (16-3)$$

اذا كان حجم العينة صغيراً

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2}{ن - 1} \quad .... (17-3)$$

اذا كان حجم العينة كبيراً

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2}{ن} \quad .... (18-3)$$

اذا كان حجم العينة مساويا لحجم المجتمع الصغير.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2}{ن - 1} \quad .... (19-3)$$

اذا كان حجم العينة مساويا لحجم المجتمع الكبير

والمقصود بحجم العينة او المجتمع صغيراً اذا كانت ن ≤ 30 ويكون كبيراً اذا كانت ن > 30.

مثال: اوجد تباين القيم 3،7،11،14،5.

الحل: نتبع الخطوات التالية.

- نجد $\bar{س} = \frac{3+7+11+14+5}{5} = \frac{40}{5} = 8$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن الوسط

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 3-8 = -5$ ، $ح_1^2 = 25$.

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 7-8 = -1$ ، $ح_2^2 = 1$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 11-8 = 3$ ، $ح_3^2 = 9$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 14-8 = 6$ ، $ح_4^2 = 36$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 5-8 = -3$ ، $ح_5^2 = 9$

نجد التباين من العلاقة.

∴ حجم العينة صغير.

$ع^2 = \frac{25+1+9+36+9}{5} = \frac{80}{5} = 16$ وهذه هي قيمة التباين

فيكون $ع = \sqrt{16} = 4$. وعليه فان الانحراف المعياري = 4

ب) اذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد التباين والانحراف المعياري نذكر اهمها:

1) الطريقة المطولة

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي

$$ح_1 = س_1 - \overline{س}$$

$$ح_2 = س_2 - \overline{س}$$

$$\vdots$$

$$ح_ن = س_ن - \overline{س}$$

- نجد مربعات الانحرافات

$$= ح_1^2 = \left(س_1 - \overline{س}\right)^2 ، ح_2^2 = \left(س_2 - \overline{س}\right)^2 ، \ldots\ldots ، ح_ن^2 = \left(س_ن - \overline{س}\right)^2$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد

$$ح_1^2 ك_1 ، ح_2^2 ك_2 ، \ldots ، ح_ن^2 . ك_ن$$

- نجد التباين من العلاقة

$$ع^2 = \frac{ح_1^2 ك_1 + ح_2^2 ك_2 + \ldots\ldots + ح_ن^2 . ك_ن}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20-3)$$

أو

$$ع^2 = \frac{\left(س_2 - \overline{س}\right)^2 . ك_1 + \left(س_2 - \overline{س}\right)^2 ك_2 + \ldots\ldots + \left(س_ن - \overline{س}\right) ك_ن}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad \ldots (21-3)$$

ثم نقسم $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر$ اذا كان حجم العينة صغيراً ، $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر - 1$ اذا كان حجم العينة كبيراً

مثال : الجدول التالي يمثل رواتب مئة موظف في احدى الشركات مبوبة كما في الجدول (3-7).

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (3-7)

والمطلوب ايجاد التباين وكذلك الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول (3-8) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار $ك_ر$	مركز الفئات $س_ر$	$س_ر.ك_ر$	$ح_ر=س_ر-\bar{س}$	$ح_ر^2$	$ح_ر^2.ك_ر$
79-70	5	74.5	372.5	$ح_1$=104.8-74.5=30.3	918.19	4590.45
89-80	7	84.5	591.5	$ح_2$=20.3	412.09	2890.3
99-90	21	94.5	1984.5	$ح_3$=10.3	106.09	2227.89
109-100	33	104.5	3448.5	$ح_4$=--0.3	00.9	0002.97
119-110	18	114.5	2061.0	$ح_5$=9.7	94.09	1693.63
129-120	13	124.5	1618.5	$ح_6$=19.7	388.09	5045.17
139-130	3	134.5	403.5	$ح_7$=29.7	882.09	2646.27
	100		10480			19096.67

جدول (3-8)

نجد المتوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{10480}{100} = 104.8$

نجد التباين من العلاقة

$$ع^2 = \frac{\sum_{1=1}^{Æ} i^{2} \propto i}{\sum_{1=1}^{Æ} i \; 1} = \frac{19096.67}{1-100} = \frac{19096.67}{99}$$

$$ع^2 \approx 192.9$$

فيكون الانحراف المعياري بهذه الطريقة .

$$ع = \sqrt{ع^2} = \sqrt{192.9}$$

$$= 13.89$$

2- ايجاد الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات $س_ر$
- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن أ
- نجد $ح_ر = س_ر - أ$
- نجد $ح_ر \times ك_ر$ ثم نجد $\sum ح_ر \times ك_ر$
- نجد مربع $ح_ر$
- نجد مجموع حاصل ضرب $ح_ر^2 \times ك_ر$ أي $\sum ح_ر^2 \times ك_ر$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}\right)^2} \qquad (22-3)$$

هذا اذا كان مجموع التكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3– ايجاد الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي.

ولذا نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نجد الوسط الفرضي أ أحد مراكز الفئات.
- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة $ح_ر = س_ر - أ$

- نجد الانحرافات المختصرة $\acute{ح}_ر = \frac{ح_ر}{ل} = \frac{\text{الانحرافات البسيطة}}{\text{طول الفئة}}$ .... (23-3)

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة× التكرارات
- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات المختصرة× التكرارات أي

$$\sum \acute{ح}_ر^2 \times ك_ر$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$ع = ل \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} \acute{ح}_ر^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} \acute{ح}_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}\right)^2} \qquad (24-3)$$

مثال : البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (3–9).

فئات الدرجات	صفر–	–10	–20	–30	–40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (3–9)

المطلوب ايجاد

1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول يشمل البيانات المطلوبة وهو جدول (3–10)

فئات العلامات	التكرار $ك_ر$	مركز الفئات $س_ر$	$ح_ر$	$ح_ر^2$	$ح_ر.ك_ر$	$ح_ر^2.ك_ر$	$ح'_ر$	$ح'_ر.ك_ر$	$ح'^2_ر$	$ح'^2_ر×ك_ر$
صفر–	2	5	–20	400	40–	800	2–	4–	4	8
–10	5	15	10–	100	50–	500	1–	5–	1	5
–20	27	25	∴	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
–30	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47
–40	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76
المجموع	100				760	13600		76		136

جدول (3–10)

1– نبدأ بحل المطلوب الاول.

– نحدد الوسط الفرضي وليكن أ = 25 أحد مراكز الفئات.

– نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.

– نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.

- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات= 760

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$ع = \sqrt{\frac{13600}{99} - \left(\frac{760}{99}\right)^2}$$

$$= \sqrt{137.37 - 58.9} = \sqrt{78.47} = 8.86$$

2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- نتبع الخطوات السابقة حتى ايجاد الانحرافات.

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$ح'_ر = \frac{ح_ر}{ل}$ حيث ل : طول الفئة.

- نجد $ح'^2_ر$.

- نجد حاصل ضرب $ح'_ر$ $ك_ر$ = 76

- نجد مجموع حاصل ضرب $ح'^2_ر$ $ك_ر$ 136

- نجد الانحراف المعياري.

$$ع = ل \sqrt{\frac{136}{99} - \left(\frac{76}{99}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{1.37 - 0.59} = 10\sqrt{0.78}$$

$$= 10 \times 0.883 = 8.83$$

نلاحظ ان النتيجتين متشابهتين في القيمة.

3-5) أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

نظرية: اذا اخضع الانحراف المعياري ع، التباين $ع^2$ للتحويل الخطي ق(س)= أس+ب فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

ع ص= |أ| . ع س ....(3-25)

حيث ع ص قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

$ع^2$ص= $أ^2$. $ع^2$ س ....(3-26)

حيث $ع^2$ص: قيمة التباين بعد التأثر

مثال: اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات =4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

ص = 0.3 س + 7

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

ع ص = |أ| . ع س.

= 0.23 × 4 + 7 = 1.2 + 7 = 8.2

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$ع^2$ص = $(0.7)^2$×16

=16×0.49

= 7.84

6-3) العلامة المعيارية وكيفية ايجادها.

تعريف: ان الدرجة المعيارية لقيمة مشاهدة $س_ر$ لعينة ماهي

$$ص_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع_س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27-3)$$

حيث $ص_ر$: هي الدرجة المعيارية للمشاهدة $س_ر$.

اما اذا كانت المشاهدة مأخوذة من مجتمع فان الدرجة المعيارية للمشاهدة $س_ر$ يمكن ايجادها من العلاقة:

$$ي_ر = \frac{س_ر - \mu}{\sigma_س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28-3)$$

حيث : μ الوسط الحسابي للمجتمع $\sigma_س$: الانحراف المعياري للمجتمع.

مثال: اذا كانت درجة احمد في امتحان مادة الاحصاء 75 وكان معدل علامات الصف 60 وكان تباين الدرجات 36 أوجد الدرجة المعيارية لدرجة أحمد.

الحل: نجد العلامة المعيارية من العلاقة:

$$ي_{75} = \frac{75-60}{\sqrt{36}} = \frac{75-60}{6} = \frac{15}{6}$$

$ي_{75} = 2.5$ أي ان الدرجة المعيارية = 2.5.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 8، 9، 5، 10 أوجد القيم المعيارية لهذه المشاهدات.

الحل: - نجد $\bar{س} = \frac{3+8+9+5+10}{5} = \frac{35}{5} 7$

-نجد $ع^2_س = \frac{(3-7)^2(8-7)^2+(9-7)^2+(5-7)^2+(10-7)^2}{5}$

$$= \frac{9+4+4+1+16}{5} = \frac{34}{5} = 6.8$$

$$ع_{س} = \sqrt{6.8} = 2.61$$

$$ي_1 = \frac{3-7}{2.61} = \frac{-4}{2.61} = -1.5$$

$$ي_2 = \frac{8-7}{2.61} = \frac{+1}{2.61} = .4$$

$$ي_3 = \frac{9-7}{2.61} = \frac{2}{2.61} = 0.8$$

$$ي_4 = \frac{5-7}{2.61} = \frac{-2}{2.61} = 0.8$$

$$ي_5 = \frac{10-7}{2.61} = \frac{3}{2.61} = 1.2$$

ولو اخذنا الدرجة المعيارية الاولى وفسرنا الرقـم-1.5 وهـذا يعـني ان قيمـة المشـاهدة الاولى تنحرف عن وسطها بدرجة ونصف الى اليسار

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 2،6،12،16،9 أوجد الانحـراف المعيـاري والتباين لهذه المشاهدات.

الحل : نجد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

$$\bar{س} = \frac{2+6+12+16+9}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$ع^2 = \frac{(2-9)^2 + (6-9)^2 (12-9)^2 + (16-9)^2 + (9-9)^2}{5}$$

$$= \frac{49+9+9+49+0}{5} = \frac{116}{5} = 23.2 \quad \text{التباين}$$

$$ع = \sqrt{23.2} = 4.82 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية 7،13،15،10،5

الحل: نجد الوسيط

$$\bar{س} = \frac{5+10+15+13+7}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

الانحراف المتوسط أ.م $= \frac{|10-5|+|10-10|+|10-15|+|10-13|+|10-7|}{5}$

$$= \frac{5+0+5+3+3}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

هناك طرق اخرى لايجاد التباين لقيم المشاهدات غير المبوبة

$$ع^2 = \frac{\sum س^2}{ن} - \left(\frac{\sum س_ن}{ن}\right)^2 \quad (29-3)$$

مثال: اوجد التباين لقيم المشاهدات التالية

8، 12 ، 10، 5 ، 15

الحل: نكون جدول الحل (3 – 11)

$س_ر$	$س_ر^2$
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (3 – 11)

$$\text{ع}^2 = \frac{558}{5} - \left(\frac{50}{5}\right)^2 = 111.6 - 100 = 11.6$$

مثال : البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لمائة عامل مبينة كما يلي:

والمطلوب : ايجاد التباين بطرقه المختلفة

الحل: نكون جدول الحل (3-12)

فئات	مراكز الفئات	التكرار	س ر ك ر	س ر - س̄	(س - س̄)²	(س ر - س̄)² ك ر	س²	س² ك ر	ح	ح ك ر	ح² ر	ح² ر ك ر
-20	30	8	240	44.4-	1971.36	15770.88	900	7200	40-	320-	1600	12800
-40	50	12	650	24.4-	595.36	7144.32	2500	30000	20-	240-	400	4800
-60	70	45	3150	4.4-	19.36	871.2	4900	320500	∴	∴	∴	∴
-80	90	20	1800	15.6	243.36	4867.2	8100	162000	20	400	400	8000
120-100	110	15	1650	35.6	1267.36	19010.4	12100	181500	40	600	1600	24000
		100	440			47664		601200		440		49600

جدول (3 – 12)

نجد أولاً:

$$\bar{\text{س}} = \frac{7440}{100} = 74.4$$

$$\text{ع}^2 = \frac{47664}{100} = 476.64 \quad \text{التباين}$$

$$\text{ع} = \sqrt{476.64} = 21.83 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

طريقة ثانية:

$$\text{ع}^2 = \frac{601200}{100} - \left(\frac{7440}{100}\right)^2 = 6012 - 5535.36 = 476.64 \quad \text{التباين}$$

ع = 21.83 الانحراف المعياري

$ع^2 = \frac{49600}{100} - \frac{440}{100}$

$= 496 - 4.4 = 491.6$

التباين التجميعي: (Poaled Variance)

لو أخذنا من مجتمعات عددها (ن) عينات ذوات الحجوم ($ن_1$، $ن_2$.....، $ن_ن$) ومن هذه العينات حسبنا ($\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$، ....، $\bar{س}_ن$) و ($ع_1^2$، $ع_2^2$، ....$ع_ن^2$) فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر \bar{س}_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر} \qquad \text{(30-3)}$$

$$\mu = \frac{ن_1\bar{س}_1 + ن_2\bar{س}_2 + \dots + ن_ن\bar{س}_ن}{ن_1 + ن_2 + \dots + ن_ن} \qquad \text{(31-3)}$$

حيث : $ن_ر \bar{س}_ر$: مجموع القيم.

$ن_ر$: عدد القيم

ومنه فإن:-

$$ع_ت^2 = \sigma^2 = \frac{\sum (ن_ر - 1) ع_ر^2 + ن_ر (\bar{س}_ر - \mu)^2}{\sum (ن_ر - 1)} \qquad \text{(32-3)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (ن_ر - 1) ع_ر^2 + ن_ر (\bar{س}_ر - \mu)^2}{\sum (ن_ر - ك)} \qquad \text{(33-3)}$$

مثال : اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (3-13):-

	I	II	III
ن	100	300	200
$\bar{س}$	65	55	60
$ع^2$	49	81	64

جدول (3-13)

فإن:-

$$\mu = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر \bar{س}_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر}$$

$$= \frac{100 \times 65 + 300 \times 55 + 200 \times 60}{600} = \frac{35000}{600} = 58.3$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ن_ر - 1) ع_ر^2 + ن_ر (\bar{س}_ر - \mu)^2}{\sum_{ر=1}^{ن} (ن_ر - ك)}$$

$$= \frac{49(99) + (299)(81) + (64)(199) + 4444.4 + 3333.3 + 6422.2}{600 - 3}$$

$$= \frac{56006}{597} = 93.81$$

عدد درجات الحرية= عدد القيم المستقلة= ن-1 ....(3-34)

$\bar{س}$ يحدد قيمة واحدة من القيم ، والقيم الباقية تكون مستقلة.

مثال: اذا كانت علامات امتحان مقدر من (20) علامة لها $\overline{س}$=10، ع=2.5 .

فاذا أصبحت علامة الامتحان (15) علامة فإن

$$\overline{س} = 10 \times \frac{15}{20} = 7.5$$

$$\overline{س} = 2.5 \times \frac{15}{20} = 1.875$$

* المقارنة بين تشتت توزيعين او اكثر:

ويستخدم لهذه العملية عدة مقاييس منها:

1 – مقاييس التشتت النسبي:

وهو موضوع يعالج مسألة المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر، فعند دراسة توزيعين او اكثر فاننا نواجه مشاكل منها:

1- الاختلاف في وحدات القياس.

2- الاختلاف في المتوسطات.

ولهذا عرف مقياس التشتت النسبي ، بأنه :

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس التوسط}} \qquad \text{.............(35-3)}$$

ومن هذه المقاييس:-

1- نصف المدى الربيعي

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{2}(ر_3 - ر_1)$$

ويوائم هذا المقياس الوسيط $\left[\frac{1}{2}(ر_3 + ر_1)\right]$ لمقياس توسط.

وعليه فان :

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس التوسط}} \qquad \text{.........(36-3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(ر_3 - ر_1)}{\frac{1}{2}(ر_3 + ر_1)}$$

$$= \frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1}$$

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1}$$ ....(37-3)

واذا اخذ شكل النسبة المئوية فانه يعرف بمعامل الاختلاف:-

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ر_3 - ر_1}{ر_3 + ر_1} \times 100\%$$ ....(38-3)

2- الانحراف المعياري:

ويوائمه الوسط الحسابي لمقياس توسط.

وعليه :

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{ع}{\bar{س}}$$ ....(39-3)

واذا اخذ شكل النسبة المئوية فانه يعرف بمعامل الاختلاف

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع}{\bar{س}} \times 100\%$$ ....(40-3)

أهمية تطبيق معامل الاختلاف:

الاختلاف نفي لمفهوم التجانس، ويوظف هذا المفهوم للدلالة على النوعية والجودة، وخاصة ضبط النوعية ومراقبة الجودة.

* **مثال:** اذا كان لدينا المعلومات في جدول (3-14) عن سلعتين فايهما أجود؟

البيان	السلعة I	السلعة II
وزن الوحدة	60 غم	60غم
سعر الوحدة	340	340
ن	50	50
$\overline{س}$	52	48
ع	8	7
معامل الاختلاف	$\frac{8}{52} \times 100\% = 15.385\%$	$\frac{7}{48} \times 100\% = 14.583\%$

جدول (3 – 14)

فمن الجدول يتبين ان السلعة II اجود من السلعة I . لأن معامل اختلافها أقل معامل اختلاف السلعة الأولى.

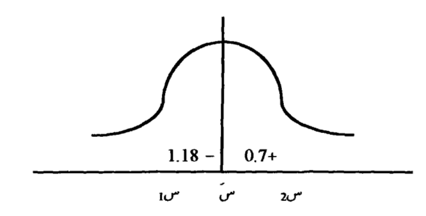
* ملحوظة : كلما قل معامل الاختلاف زادت جودة السلعة.

2)- التعيير: (Standarization)

هو وضع القيم ضمن معيار موحد، واحصائياً هو عبارة عن التعبير عن قيم المتغير (س) الذي له التوزيع التكراري د(س) والمتوسط ($\overline{س}$) والانحراف المعياري (ع)، بعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها تلك القيم عن وسطها الحسابي.

فلأي قيمة مثل ($س_ر$) فان:

$$ي_ر = \frac{س_ر - \overline{س}}{ع} \quad \text{.....................(3-41)}$$



ففي الرسم السابق:-

- القيمة (+0.7) تعني ان القيمة س2 تنحرف (0.7) انحرافاً معيارياً عن س̄ من الجهة اليمنى .

- القيمة (-1.18) تعني أن القيمة س 1 تنحرف (1.18) انحرافاً معيارياً عن س̄ من الجهة اليسرى.

* **مثال:** ضمن المعطيات في جدول (3-15) أيهما مستواه أعلى:-

البيان	أحمد	محمود
سر	72	82
س̄	60	80
ع	80	10
يس	1.5	0.2

جدول (3-15)

أحمد مستواه أعلى لأن القيمة المعيارية له أكبر.

* **ملحوظة:** كلما زادت القيمة المعيارية زاد المستوى، ومنه فإن المستوى يتناسب تناسباً طردياً مع القيمة المعيارية.

*** مميزات القيمة المعيارية:**

1- للمتغير (س) الذي له التوزيع التكراري د(س$_ر$)، فإن القيمة المعيرايـة (ي$_س$) لها توزيع تكراري كمتوسط حسابي= ٠، وتباين = 1

$$\bar{ي}_س = ٠$$

* البرهان:-

من العلاقة $\bar{ي}_ر = \frac{1}{ن} \sum ي_ر = \frac{1}{ن} \sum \frac{س_ر - \bar{س}}{ع}$

$$ي_س = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع}$$

$$\bar{ي}_ر = \frac{1}{ن} \sum ي_ر = \frac{1}{ن} \sum \frac{س_ر - \bar{س}}{ع}$$

$$= \frac{1}{ع \times ن} \sum (س_ر - \bar{س})$$

لكن $\sum س_ر - \bar{س} = 0$ لأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي=0

$$\Leftarrow \quad ي_ر = \frac{1}{ع \times ن} \sum (س_ر - \bar{س})$$

$= \frac{1}{ع \times ن} \times$ صفر = صفر وهو المطلوب.

$$ع^2_ي = 1$$

البرهان:

$$ى_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع}$$

$$ع^2_ي = \frac{1}{ن} \sum \left(ى_ر - \bar{ى}\right)^2 \quad \text{لكن } \bar{ى} = \therefore$$

$$= \frac{1}{ن} \sum ى^2_{س_ر}$$

$$= \frac{1}{ن} \sum \left(\frac{س_ر - \bar{س}}{ع}\right)^2$$

$$= \frac{1}{ن} \times \frac{1}{ع^2} \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^2$$

$$= \frac{1}{ع^2} \times \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^2}{ن} \quad \text{لكن } ع^2 = \frac{\sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^2}{ن}$$

$$\frac{1}{ع^2} \times ع^2 = 1$$

* **مثال:** جد ($\bar{ى}$) و($ع^2_ي$) للبيانات التالية المبينة بالجدول (3-16).

$س_ر$	$(س_ر - \bar{س})^2$	ي	$ي^2$
2	16	1.14−	2
4	4	1.41−	0.5
6	0	0	0
8	4	0.7+	0.5
10	16	1.14+	2
30	40	صفر	5

جدول (3 − 16)

$$\bar{س} = \frac{\sum س_ر}{ن} = \frac{30}{5} = 6$$

$$ع^2 = \frac{\sum (س_ر - \bar{س})^2}{ن} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\bar{ي} = \frac{\sum س_ر}{ن} = صفر$$

$$ع_ي^2 = \frac{\sum ي^2}{ن} = \frac{5}{5} = 1$$

اذا كان المتغير (س) الذي له التوزيع التكراري [د(س)] والمتوسط ($\bar{س}$) والتباين ($ع^2$) فـان القيمة المعيارية (ي) لها التوزيع[د(س)] = التوزيع المعتاد م (μ ، σ) الذي يعتمد على :

μ =∴ $ى^2$= 1

والتوزيع المعتاد (م) = د(س) = $\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 ط}} هـ^{\frac{1}{2}(\frac{\sigma_ر - \mu}{\sigma})^2}$

مثال: اذا كان الوسط الحسابي لقيم مشاهدات 50 وانحرافها المعياري 4 وكانت مجموعة اخرى من قيم مشاهدات مبوبة كما في الجدول التالي.

فيما يلي بيان بعدد ساعات الاستعداد الاسبوعي المبوبة حسب مشاهدات العينة العشوائية الحجم 50 من الطلبة.

فئات الاستعداد	عدد الطلبة	$س_ر$	$س_ر ك_ر$	فئات اقل من	التكرار التجميعي
0-	8	1	8	2 >	8
2-	12	3	36	4>	20
4-	15	5	75	6>	35
6-	10	7	70	8>	45
8-10	5	8	45	10>	50
	50		234		

المطلوب :1- ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات

2- ايجاد المنوال بطريقة الفروق

3- ايجاد الوسيط.

4- ايجاد الانحراف المتوسط.

5- ايجاد الانحراف المعياري.

6- ايجاد المئين 80.

7- ايجاد معامل الاختلاف.

8- ايجاد معامل الالتواء بطريقة بيرسون.

9- ايجاد معامل الالتواء بناءً على مقارنة المساحة بين الربيعان.

الحل:

1- الوسط الحسابي: $\frac{\sum س_ر ك_ر}{\sum ك_ر} = \frac{234}{50} = 4.68$

2- ايجاد المنوال بطريقة الفروق

المنوال= الحد الادنى للفئة المنوالية= $\frac{ف_1}{ف_1+ف_2} \times ل$

حيث ف $_1$= تكرار الفئة المنوالية- التكرار السابق

ف$_2$= تكرار الفئة المنوالية - التكرار اللاحق

ل= طول الفئة

$= 4 + \frac{3}{5+3} \times 2$

$= 4 + \frac{6}{8} = 4 + 0.75 = 4.75$

2) الوسيط = الحد الادنى للفئة الوسيطية+ $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار التجميعي السابق}}{\text{التكرار التحميضي اللاحق} - \text{التكرار التجميعي السابق}}$ ×ل

ترتيب الوسيط= $\frac{\sum ك_ر}{2} = \frac{50}{2} = 25$

الفئة الوسيطية= 4

الوسيط = الحد الادنى للفئة الوسيطية+ $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار التجميعي السابق}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق} - \text{التكرار التجميعي السابق}}$ ×ل

$$= \frac{20-25}{20-35} + 4$$

$$= \frac{5}{15} \times 2 + 4 = \frac{10}{15} + 4$$

$$= 4.66$$

4) ايجاد الانحراف المتوسط

الانحراف المتوسط= $\frac{\sum ك_ر |س_ر - \bar{س}|}{ك_ر}$

$$= \frac{8|1-5| + 12|3-5| + |15+| \quad 15|5-5| + 10|7-5| + 5|9-5|}{50}$$

$$= \frac{32 + 24 + 0 + 20 + 20}{50} = \frac{96}{50} = 1.92$$

5) الانحراف المعياري= $\sqrt{\frac{\sum ك_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sum ك_ر}}$

$$ع = \sqrt{\frac{8(1-5)^2 + 12(3-5)^2 + 15(5-5)^2 + 10(7-5)^2 + 5(9-5)^2}{50}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{80+40+0+48+128}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{296}{50}} = \sqrt{5.92} = 2.433$$

6) ايجاد المئين80

ترتيب المئين= $\frac{80}{100} \times \sum ك_ر = \frac{80}{100} \times 50 = 40$

الفئة المئينية =6

قيمة المئين 80= الحد الادنى للفئة المئينية+ $\frac{\text{ترتيب المئين} - \text{التكرار التجميعي السابق للمئين}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق} - \text{السابق}} \times ل$

$$= 6 + \frac{40-35}{45-35} \times 2$$

$$= 6 + \frac{5}{10} \times 2 = 6 + \frac{10}{10}$$

$$= 6 + 1 = 7$$

7) ايجاد معامل الاختلاف

$$= \frac{ع}{\bar{س}} \times 100\%$$

$$= \frac{2.433}{4.68} = 0.5198$$

$$= 0.52 \times 100\%$$

8) حساب معامل الالتواء بطريقة بيرسون

$$= \frac{\bar{س} - م}{ع} \,/\, \frac{3(\bar{س} - و)}{ع}$$

الوسط الحسابي بعد التقريب 5 $\frac{4.75-5}{2.433} = 0.102$

معامل الالتواء $= \frac{(ر_3 - ر_2) - (ر_2 - ر_1)}{ر_3 - ر_1}$

$= \frac{(ر_3 - و) - (و - ر_1)}{ر_3 - ر_1}$

$ر_3$: الربيع الثالث

$ر_2$: و الوسيط

$ر_1$: الربيع الاول

$ر_3$ = المئين 75

ترتيب المئين $= \frac{75}{100} \times \sum ك_ر = \frac{75}{100} \times 50 = 38$

الفئة المئينية=6

قيمة المئين 80= الحد الأدنى للفئة المئينية+ $\frac{\text{ترتيب المئين} - \text{التكرار التجميعي السابق للمئين}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق السابق}}$ ×ل

$= 6 + \frac{38 - 35}{45 - 35} \times 2$

$= 6 + \frac{3}{10} \times 2$

$= 6 + \frac{6}{10}$

$= 6 + 0.6 = 6.6$

$ر_2$= المئين 25

ترتيب المئين= $\frac{25}{100} \times \sum ك_ر = \frac{25}{100} \times 50 = 12.52$

الفئة المئينية = 2

قيمة المثين $= 2 + \frac{8-12.5}{8-20} \times 2$

$= 2 + \frac{4.5}{12} \times 2$

$= 2 + \frac{9}{12}$

$= 2 + 0.75 = 2.75$

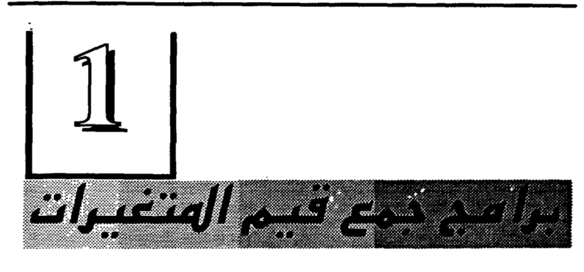
معامل الالتواء $= \frac{(ر_3 - ر_2) - (ر_2 - ر_1)}{ر_3 - ر_1}$

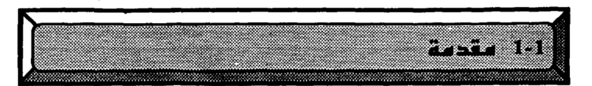
$= \frac{(2.75 - 4.66) - (4.66 - 6.6)}{2.75 - 6.6}$

$= \frac{1.91 - 1.94}{3.85}$

$= \frac{0.03}{3.85}$

$= 7.792 \times 10 = 0.00779$





من المعروف أن جميع عمليات التحليل الاحصائي تعتمد بشكل رئيس، على عمليات حسابية تتكرر في كل مسالة احصائية، وأهم هذه العمليات الحسابية هي: عملية جمع قيم المتغيرات، سواء كانت متغيرات عادية أو متغيرات مؤشّرة، وعملية جمع مربعات هذه القيم، ثم عملية جمع ضروب قيم المتغيرات المختلفة، وفي هذا الفصل نبين كيف نقوم بتنفيذ هذه العمليات الحسابية باستخدام الكمبيوتر.

2-1 جمع N من المتغيرات SUMMATTION OF DATA POINTS

النص الرياضي للمسالة:

اكتب برنامجا لايجاد المجموع S لسلسلة من قيم المتغيرات X_1, X_2 ... الى X_N عددها N، ومعرّفة على النحو التالي:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

الحل يمكن ترتيب حل المسألة على ثلاث خطوات: الخطوة الأولى وتتمثل بكتابة خوارزمية الحل (وتعني الخطوات المنطقية المرتبة لحل المسألة)، والخطوة الثانية، وتتمثل بكتابة برنامج الكمبيوتر للمسألة، اما الخطوة الثالثة فتتمثل بتطبيق البرنامج على مثال محلول مع عرض نتائجه:

خوارزمية الحل:

تتكون خوارزمية حل المسألة من الخطوات الاتية:

1. عيِّن قيمة عدد المتغيرات N
2. تاكد أن N يساوي أو أكبر من 1
3. صَفِّر مخزن المجموع S ، أي ضع قيمة S تساوي صفراً في ذاكرة الكمبيوتر
4. أدخل قيم X الى ذاكرة الكمبيوتر الواحدة تلو الاخرى.
5 اجمع كل قيمة من قيم X الى المجموع S في مخزن S في الذاكرة حسب جملة الجمع

$$S = S + X$$

حيث تمثل S في الجانب الأيمن قيمة المجموع قبل اضافة X بينما تمثل S في الجانب الايسر اخر قيمة للمجموع بعد اضافة Xاليه

6. اطبع النتيجة S
7. توقف وأنهِ البرنامج

البرنامج المستعمل:

تمثل السطور التالية البرنامج المطلوب لحل المسألة، وينبغي ملاحظة أن جميع السطور التي تبدأ بكلمة الملاحظة REM ليست جزءً من البرنامج، وإنما هي سطور

أضيفت لشرح خطوات البرنامج لاغراض تعليمية. وعند تنفيذ البرنامج يمكن للمستخدم أن يحذفها جميعها منه دون ان يؤثر ذلك في عمل البرنامج.

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SUM OF DATA POINTS **
020 REM **1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
030      INPUT N
040 REM ** 2. CHECK : IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
050      IF N < 1 THEN END
060 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
070 S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITLALLY EQUAL TO ZERO **
090      K = 0
100 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
110      INPUT X
120 REM ** 5. ADD THE NEW X TO THE LAST SUM S **
130      S = S + X
140 REM  ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X **
150 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM **
160      K = K + 1
170 REM ** CHECK IF ALL X'S HAVE NOT BEEN ADDED THEN GO BACK TO **
180 REM ** GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
190      IF K <> N THEN GO TO 110
200 REM ** 6. PRINT THE SUM S **
210      PRINT 'THE SUM OF THE DATA POINTS=':S
220 REM ** 7. END THE PROGRAM **
230      END
```

مثال اذا كان لديك المعطيات الآتية:

$$X_1 = 3.2 \quad , \quad X_2 = 1.7 \quad , \quad X_3 = 7.2 \quad , \quad X_4 = 4, X_5 = 14$$

فاحسب مجموعها S حيث:

$$S = \sum_{i=1}^{5} x_i$$

الحل: أدخل المعطيات مرتبة بعد البرنامج على النحو التالي:

5
3.2
1.7
7.2
4.0
14.0

حيث تمثل 5 قيمة عدد النقط N

وسيظهر لك الجواب فورا على الصورة التالية:

THE SUM OF THE DATA POINTS = 30.1

مثال استخدم البرنامج لجمع أوزان عينات من الفوسفات جمعها أحد العاملين في منجم للفوسفات في احد الايام وكانت كالاتي:

4.21 , 6.35 , 5.42 , 8.11 , 6.04 , 7.55 , 3.46 , 9.05

الحل: أدخل المعطيات مرتبة بعد البرنامج على النحو التالي:

8
4.21
6.35
5.42
8.11
6.0
7.55
3.46
9.05

حيث تكون قيمة N وهي 8 في البداية حسب ورودها في البرنامج وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THEN SUM OF THE DATA POINTS = 50.19

3.1 جمع N من المتغيرات المؤشرة
SUMMATION OF N SUBSCRIPTED VARIABLES

النص الرياضي للمسألة:

يعتبرالنص الرياضي للمسألة الواردة في الفقرة السابقة نصا لهذه المسألة أيضا، والاختلاف بينهما هو في طريقة الحل بالكمبيوتر، وبهذا يكون النص هو ايجاد الجمع S معرفا على الصورة السابقة نفسها وعلى النحو التالي:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

خوارزمية الحل: تتكون خوارزمية الحل من الخطوات الآتية:

1. عين عدد المتغيرات N
2. تأكد أن N يساوي أو اكبر من 1
3. أدخل قيم X الى ذاكرة الكمبيوتر على شكل مصفوفة وسمّها A
4. صفّر مخزن المجموع S، أي ضع قيمة S تساوي صفراً.
5. اجمع كل قيمة من قيمة X الى المجموع S حسب جملة الجمع

   S = S + A(I)
6. اطبع النتيجة S
7. توقف

البرنامج المستعمل

```
10 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES SUMMATION OF SUBSCRIPTED VARIABLES **
20 REM ** TELL COMPUTER THAT YOU WILL STORE THE X VALUES **
30 REM ** IN THE MATRIX A WHICH CAN TAKE 1000 VALUES OF THEM **
```

```
40  REM ** THE NUMBER 1000 CAN BE REPLACED BY ANY NUMBER **
50        DIM A (1000)
60  REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
70        INPUT N
80  REM ** 2. IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
90        IF N < 1 THEN END
100 REM ** IF N IS MORE THAN 1000 THEN END THE PROGRAM **
110       IF N > 1000 THEN END
120 REM ** USE I AS A COUNTER FOR DATA POINTS & SET IT TO 1 INITIALLY **
130       I = 1
140 REM ** 3. ENTER THE VALUE OF NEXT X & PUT IT IN MATRIX A **
150       INPUT X
160       A (I) = X
170 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER I**
180       I = I + 1
190 REM ** TEST IF ALL THE X'S HAVE NOT BEEN ADDED THEN GO BACK **
200 REM ** TO ADD ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
210       IF I <= N GO TO 150
220 REM ** 4. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
230       S = 0.0
240 REM ** RESET THE COUNTER I TO 1**
250       I = 1
260 REM ** 5. ADD NEW X TO THE LAST SUM **
270       S = S + A (I)
280 REM ** MOVE THE COUNTER I BY 1 TO TAKE NEXT X **
290       I = I + 1
300 REM ** TEST IF ALL POINTS HAVE BEEN ADDED **
310 REM ** OTHERWISE; GO BACK TO GET NEXT X **
320       IF I <= N GO TO 270
330 REM ** 6. PRINT THE RESULTS S **
340       PRINT ' THE SUM OF DATA POINTS =':S
350 REM ** 7. END THE PROGRAM **
360       END
```

مثال أثناء معرض لبيع الكتب ، كانت مبيعات احد المشتركين في المعرض خلال اسبوع كما يلي:

120 , 200 ,220 , 150 , 300 , 180 , 100

الحل: أدخل الارقام المعطاة مرتبة بعد البرنامج على النحو:

7
120
20
220
150
300
180
100

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية

THE SUM OF DATA POINTS = 1270

مثال قام دكتور في كلية للتربية بدراسة احصائية على مستوى الذكاء لدى خمس مجموعات من طلبة الرياضيات في احدى الجامعات، وكانت اعداد المجموعات التي جرى عليها البحث كما يأتي: 28 ,32 ,62 ,56 ,45 فجد العدد الكلي لهذه المجموعات.

الحل: أدخل الارقام المعطاة مرتبة بعد البرنامج على النحوالتالي

5
45
56
62
32
28

وسيظهر لك الجواب المطلوب على الصورة

THE SUM OF DATA POINTS = 223

4-1 جمع N من ضروب المتغيرات
SUMMATION OF PRODUCTS OF N DATA

النص الرياضي للمسألة:

اكتب برنامجاً لحساب مجموع N من ضروب المتغيرين X و Y حسب التعريف التالي:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots\ldots\ldots + X_N \ X_N$$

خوارزمية الحل:

1. عين عدد المتغيرات N
2. تأكد أن N يساوي أو أكبر من 1
3. ضع قيمة مجموع الضروب S تساوي صفرا
4. أدخل قيم كل من X و Y إلى ذاكرة الكمبيوتر الواحدة تلو الأخرى
5. اجمع قيمة ضرب X في Y كل مرة إلى المجموع S حسب جملة الجمع S = S + X*Y
6. اطبع النتيجة S
7. توقف

البرنامج المستعمل هو:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SUM OF PRODUCTS OF DATA POINTS**
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS(N)**
030      INPUT N
040 REM **2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050      IF N<1 THEN END
```

```
060 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
070        S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT ZERO INITIALLY **
090        K = 0
100 REM ** 4. ENTER NEXT X & Y **
110        INPUT X, Y
120 REM ** 5.ADD THE PRODUCT X*Y TO THE SUM S **
130        S = S + X*Y
140 REM ** MOVE THE COUNTER K BY 1: I.E. ADD 1 TO K **
150        K = K + 1
160 REM ** IF ALL X'S & Y'S HAVE NOT BEEN PROCESSED THEN GO BACK **
170 REM ** TO GET NEXT ONES: OTHERWISE CONTINUE **
180        IF K<>N GO TO 110
190 REM ** 6- PRINT THE SUM OF PRODUCTS S **
200        PRINT "THE SUM OF PRODUTS =";S
210 REM ** 7. END THE PROGRAM**
220        END
```

مثال اذا أعطيت القيم المرتبة الآتية:

$$X_1 = 5, \quad X_2 = 3, \quad X_3 = 6, \quad X_4 = 8$$
$$Y_1 = 2, \quad Y_2 = 4, \quad Y_3 = 3, \quad Y_4 = 7$$

فاحسب مجموع ضروب هذه القيم.

الحل: أدخل قيم X و Y المتقابلة مرتبة بعد قيمة N على النحو التالي:

```
4
5,2
3,4
6,3
8,7
```

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية:

```
THE SUM OF PRODUCTS = 96
```

مثال اشترى تاجر ثلاثة أنواع من القماش كان سعر الأول دينارا للمتر الواحد، والثاني دينارا ونصف الدينار، والثالث دينارين، فاذا اشترى من النوع الأول 200 مترا ومن الثاني 150 مترا، ومن الثالث 100متر، فاحسب المبلغ الذي يدفعه التاجر.

الحل: أدخل قيم الامتار والاسعار المتقابلة مرتبة بعد قيمة N على النحو التالي:

```
3
200, 1.0
150, 1.5
100, 2.0
```

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية:

```
THE SUM OF PUODUCTS = 625
```

5-1 جمع مربعات N من المتغيرات
SUMMATION OF SQUARES OF N DATA POINTS

النص الرياضي للمسألة:

يمكن التعبير عن النص بالمعادلة التالية:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_N^2$$

خوارزمية الحل:

1. عين عدد المتغيرات N
2. تأكد أن N يساوي أو أكبر من 1
3. ضع قيمة مجموع المربعات S تساوي صفرا
4. ادخل قيم X الواحدة تلو الاخرى
5. اجمع مربع كل X مدخلة إلى مجموع المربعات S حسب معادلة الجمع
   $S = S + X*X$

6. اطبع النتيجة النهائية S
7. توقف.

البرنامج المستعمل هو:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES SUM OF SQUARES OF N DATA POINTS **
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
030       INPUT N
040 REM ** 2. IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050       IF N< 1 THEN END
060 REM ** 3. PUT THE SUM OF SQUARES EQUAL TO ZERO **
070       S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT  ZERO INITIALLY **
090       K=0
100 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
110       INPUT X
120 REM ** 5. ADD SQUARE OF X TO THE LAST SUM S **
130       S = S + X*X
140 REM ** MOVE THE COUNTER K TO THE NEXT POINT & ADD 1 TO IT **
150       K = K+1
160 REM ** TEST IF ALL X'S WERE TAKEN: IF NOT GO BACK TO GET ANOTHER.
170       IF K<>N GO TO 110
180 REM ** 6. PRINT SUM OF SQUARES S **
190       PRINT "THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS =";S
200 REM ** 7. END THE PROGRAM **
210       END
```

مثال جد مجموع مربعات القيم الآتية:

$$X_1 = 4 ,\quad X_2 = 2 ,\quad X_3 = 5 ,\quad X_4 = 7 ,\quad X_5 = 1$$

الحل: أدخل القيم المعطاة مرتبة بعد قيمة عددها N وهو 5 هنا على النحو التالي:

5
4
2
5
7
1

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS = 95

مثال ارادت مؤسسة لبيع الأراضي تقسيم قطعة ارض لديها إلى أربعة أقسام بحيث يكون شكل كل منها مربعاً، وكانت اطوال القطع هي: 60, 100, 80, 140 بالامتار احسب المساحة الكلية للأرض.

الحل: ادخل قيم الأطوال مرتبة على النحو التالي بعد البرنامج:

4
60
100
80
140

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية مساحة بالامتار المربعة:

THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS = 39600

تمارين

1. أعطيت القيم التالية من احدى الدراسات الاحصائية:

$X_1 = 10, \quad X_2 = 7, \quad X_3 = 5, \quad X_4 = 12, \quad X_5 = 4, \quad X_6 = 10$

فاحسب كلا من:

(أ) $\sum_{i=1}^{6} X_i$ (ب) $\sum_{i=1}^{6} X_i^2$

(جـ) $\sum_{i=1}^{6} X_i^3$ (د) $\sum_{i=1}^{6} X_i^4$

2. وجد مصنع للرخام أن عدد قطع البلاط المكسورة اثناء التصنيع خلال اربع وعشرين ساعة كان كما يلي:

3 5 2 2 4 5 7 8 6 4 11
6 8 3 17 6 4 5 8 12 10

احسب العدد الكلي للبلاط المكسور في ذلك اليوم.

3. أعطيت قيم المتغيرات الاتية:

$X_1 = 5,\quad X_2 = 9,\quad X_3 = 10,\quad X_4 = 6$

$Y_1 = 3,\quad Y_2 = 6,\quad Y_3 = 2,\quad Y_4 = 4$

$Z_1 = 2,\quad Z_2 = 1,\quad Z_3 = 3,\quad Z_4 = 5$

فاحسب كلا من:

(أ) $\sum_{i=1}^{4} X_i$ (ب) $\sum_{i=1}^{4} X_i Y_i$

(جـ) $\sum_{i=1}^{4} X_i^2$

(د) اكتب برنامجا لحساب $\sum_{i=1}^{4} X_i Y_i Z_i$

(هـ) اكتب برنامجا لحساب $\sum_{i=1}^{4} X_i^2 Y_i$

2

تحليل البيانات

2-1 حساب الوسط الحسابي لسلسلة من N من الاعداد

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الحسابي Arithmetic Mean لسلسلة من الاعداد X_1، X_2، ... إلى X_N عددها N باستخدام الصيغة الرياضية التالية.

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 \ldots + X_N}{N}$$

خوارزمية الحل

1- عيّن العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.

2- تأكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.

3- صفّر مخزن المجموع S، أي ضع قيمة S تساوي صفراً في ذاكرة الكومبيوتر.

4- أدخل قيم X إلى ذاكرة الكومبيوتر الواحدة تلو الاخرى.

5- اجمع كل قيمة من قيم (X) إلى المجموع S في مخزن (S) في الذاكرة حسب صيغة الجمع $S = S + X$.

6- اقسم مجموع القيم (X) على عدد نقاط البيانات (N) وذلك لحساب الوسط الحسابي (A).

7- اطبع النتيجة

8- توقف وأنهِ البرنامج

البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE ARITMETIC MEAN **
020 REM ** OF A SERIES OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
040       INPUT N
050 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1THEN END THE PROGRAM **
060       IF N<1 THEN END
070 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
080       S= 0.0
090 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT TO ZERO **
100       K=0
110 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
120       INPUT X
130 REM ** 5. ADD THE NEW X TO THE LAST SUM S **
140       S=S+X
150 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
160 REM ** X HAS BEEN ADDED TO THE SUM **
170       K= K+1
180 REM ** CHECK IF ALL X'S HAVE NOT BEEN ADDED **
190 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
200       IF K <>N THEN GO TO 120
210 REM ** 6. COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) BY DIVIDING **
220 REM ** THE SUM OF DATA POINTS (S) BY THE NUMBER N **
230       A=S/N
```

```
250       PRINT 'THE ARITHMETIC MEAN =';A
260 REM ** 8. END THE PROGRAM **
210       END
```

مثال جد الوسط الحسابي لنقاط البيانات الاتية 3 ,4 ,7 ,8 ,9.

الحل: أدخل البيانات مرتبة على النحو التالي:

5
3
4
7
8
9

حيث تمثل 5 عدد نقاط البيانات، وسيظهر لك الجواب فوراً على النحو التالي:

THE ARITHMETIC MEAN = 6.2

مثال باعت احدى شركات الاطارات من خلال ستة فروع لها الكميات الاتية من الاطارات خلال يوم واحد: 520، 460، 372، 288، 412، 348. استخدم البرنامج المذكور آنفاً لحساب معدل المبيعات اليومية للشركة.

الحل: أدخل البيانات مرتبة بعد قيمة عددها N وهو هنا 6 مرتبة على النحو التالي:

6
520
460
372
288
412
348

وسيظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN = 400

2-2 حساب الوسيط لسلسلة من N من نقاط البيانات

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسيط Median لسلسلة من نقاط البيانات X_1، X_2، ... إلى X_N عددها N –سواءً كانت مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً –باستخدام الصيغتين الرياضيتين التاليتين:

إذا كان N عدداً فردياً

$$M_d = X_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$$

إذا كان N عدداً زوجياً

$$M_d = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2}$$

خوارزمية الحل:

-1 افرض سلسلة من نقاط البيانات (X) مرتبة ترتيباً رقمياً تصاعدياً أو تنازلياً.

-2 عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.

-3 إذا كان العدد N فردياً، فإن الوسيط (M) هو نقطة البيانات التي تحمل التسلسل (N+1)/2

-4 إذا كان العدد N زوجياً، فإن العدد الاوسط (M) هو مجموع نقاط البيانات التي تحمل التسلسلات $\left[\frac{N}{2}\right]$ و $\left[\left(\frac{N}{2}\right)+1\right]$ مقسوماً على 2.

البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM DETERMINES THE MEDIAN OF DATA POINTS **
020 REM ** TELL COMPUTER THAT (X) WILL BE A VECTOR OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS. **
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
```

```
050     DIM X(400)
060 REM ** 1. THE PROGRAM ASSUMES THAT THE DATA POINTS ARE **
070 REM ** IN EITHER ASCENDING OR DESCENDING NUMERICAL ORDER **
080 REM ** 2. DETERMINE THE NUMBER (N) OF DATA POINTS BY **
090 REM ** COUNTING THE DATA POINTS AS THEY ARE READ. IT WILL **
100 REM ** BE ASSUMED THAT A DATA POINT WITH A VALUE OF **
110 REM ** -98765 WILL SIGNIFY THE END OF THE SERIES.**
120 REM ** NOTE, HOWEVER, THAT THE DATA POINT WITH THIS VALUE **
130 REM ** IS NOT CONSIDERED PART OF THE SERIES **
140 REM
150 REM ** INITIALIZE THE COUNTER AND SUBSCRIPT (N) BY SETTING **
160 REM ** IT EQUAL TO 1 TO INDICATE THE NUMBER OF THE **
170 REM ** DATA POINT (X) THAT WILL BE ENTERED AND AS A **
180 REM ** SUBSCRIPT TO REFERENCE ANY DATA POINT IN THE VECTOR **
190     N = 1
200 REM ** GET THE NEXT DATA POINT AND STORE IT TEMPORARILY **
210 REM ** IN THE STORE XO. **
220     INPUT X0.
230 REM ** CHECK THE VALUE OF (XO) TO DETERMINE IF IT IS **
240 REM ** EQUAL TO THE SPECIAL VALUE -98765. IF IT IS EQUAL,
250 REM ** GO TO 460; OTHERWISE, CONTINUE. **
260     IF X0 = -98765.0 THEN GO TO 460.
270 REM ** NOW (N) INDICATES THE NUMBER OF THE DATA POINT **
280 REM ** JUST READ AND STORED IN (X0). IT IS CONVENIENT **
290 REM ** TO STORE THE NTH DATA POINT IN THE NTH **
300 REM ** ELEMENT OF THE VECTOR (X). X(N) INDICATES **
310 REM ** THE NTH ELEMENT OF THE VECTOR X. **
320     X(N) = X0
330 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER & SUBSCRIPT (N) TO INDICATE **
340 REM ** THE NUMBER OF THE NEXT DATA POINT TO BE **
350 REM ** PROCESSED. **
```

```
360        N = N + 1
370 REM ** CHECK (N) TO DETERMINE IF THE NUMBER OF **
380 REM ** NEXT DATA POINT IS GREATER THAN 400; IF IT IS, **
390 REM ** THEN END.THE PROGRAM **
400        IF N > 300 THEN END.
410 REM ** GO BACK TO THE NEXT DATA POINT. **
420        GOTO 10
430 REM ** SINCE THE VALUE -98765 WAS COUNTED ABOVE, **
440 REM ** AND SINCE IT IS NOT AS A PART OF THE DATA **
450 REM ** SERIES, THE (N) MUST BE REDUCED BY 1. **
460        N = N-1
470 REM ** IF THE (N) IS EQUAL TO ZERO, THE MEDIAN CAN- **
480 REM ** NOT BE COMPUTED, SO THE PROGRAM STOPS **
490        IF N = 0 THEN END
500 REM ** 3. DETERMINE IF (N) IS ODD OR EVEN. **
510 REM ** IF THE INTEGER PART OF K/2 EQUALS THE ACTUAL **
520 REM ** VALUE K/2 THEN K IS EVEN. IF SO GOTO 670.**
550 REM ** AND COMPUTE THE MEDIAN (M). IF K IS ODD, **
540 REM ** THEN CONTINUE. **
550        IF INT (K/2) = (K/2) THEN GOTO 670.
560 REM ** CALCULATE THE SUBSCRIPT (I) TO INDICATE THE **
570 REM ** PARTICULAR ELEMEINT OF (X) THAT IS THE MEDIAN. **
580 REM ** SINCE (N) IS OOD NOW, THEN (I) WILL BE. (N+1)/2.**
590        I = (N+1)/2
600 REM ** DETERMINE (M) BY SETTING M=X(I). **
610        M = X(I)
620 REM ** GOTO 750 TO PRINT THE MEDIAN **
630        GOTO 750
640 REM ** 4. NOW (N) IS EVEN, SO COMPUTE (I1) TO INDICATE**
650 REM **  THE FIRST OF THE ELEMENTS OF (X) TO BE USED**
660 REM **  TO DETERMINE (M).**
670        I1 = N/2
680 REM ** COMPUTE (I2) AS ABOVE, BUT ADD 1 TO THE RESULT. **
690        I2 = (N/2) + 1
```

```
700 REM ** DETERMINE THE SUM (S) OF X(I1) & X(I2).**
710      S = X(I1) + X(I2)
720 REM ** COMPUTE THE MEDIAN (M) BY DIVIDING (S) BY 2. **
730      M = S/2.0
740 REM ** PRINT THE MEDIAN (M) OF THE SERIES. **
750      PRINT 'THE MEDIAN IS':M
760 REM ** END THE PROGRAM **
770      END
```

مثال استخدم البرنامج أعلاه لحساب الوسيط لسلاسل الاعداد التالية:

(أ) 42, 20, 14, 8, 4, 3

(ب) 10, 8, 6, 4, 2

الحل: (أ) أدخل البيانات مرتبة كما يأتي:

```
3
4
8
14
20
42
-98765
```

وسوف يظهر لك الجواب على الصورة التالية:

```
THE MEDIAN IS 11
```

(ب) أدخل البيانات مرتبة كما يأتي:

```
2
4
6
8
10
-98765
```

وسوف يظهر لك الجواب على الصور التالية:

```
THE MEDIAN IS 6
```

مثال حصل احد التلاميذ على العلامات الآتية في الامتحان النهائي:

98, 91, 87, 81, 75, 68, 62. فماهو الوسيط لهذه العلامات؟

الحل: أدخل البيانات المذكورة مرتبة كما يلي:

```
62
68
75
81
87
91
98
-98765
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE MEDIAN IS 81

3-2 حساب الانحراف المتوسط لبيانات غير مترابطة

النص الرياضي للمسالة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المتوسط (.Mean Deviation (M. D لسلسلة من نقاط البيانات X_1، X_2، ... إلى X_N عددها N لهامتوسط m باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$M.\,D. = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - m|}{N}$$

خوارزمية الحل:

-1 عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.

3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة نقاط البيانات، وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).

4- احسب مجموع الانحرافات المطلقة absolute deviations عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات وكما يأتي:

أ- عيّن الانحراف عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات (X) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) للسلسلة من كل نقطة بيانات (X).

ب- عيّن القيمة المطلقة (D3) للانحراف من المتوسط (D2) في الخطوة (أ).

جـ- احسب مجموع الانحرافات المطلقة عن المتوسط (S2) وذلك باضافة القيم المطلقة (D3) التي حصلنا عليها من الخطوة (ب).

5- احسب الانحراف المتوسط (D1) وذلك بقسمة مجموع الانحرافات المطلقة عن المتوسط (S2) على عدد نقاط البيانات (N) في السلسلة.

6- اطبع النتيجة.

7- توقف وانه البرنامج.

البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE MEAN DEVIATION **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS.**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
050        DIM X(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070        INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END PROGRAM **
090        IF N< 1 THEN END.
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END PROGRAM **
110        IF N> 400 THEN END
```

```
120 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) **
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140       S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY **
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170       K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF NEXT X**
190       INPUT X(K)
200 REM ** 3(A) COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY ADDING, THE LAST X**
210       S = S + X(K)
220 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
230 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
240       K = K + 1
250 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **
260 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
270       IF K <= N THEN GOTO 190
280 REM ** 3 (B) COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
290       A = S/N
300 REM ** 4. COMPUTE THE SUM OF THE ABSOLUTE DEVIATIONS**
310 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS. **
320 REM ** SET THE ACCUMULATDR S2 TO ZERO**
330       S2 = 0.0
340 REM ** RESET K TO 1**
350       K = 1
360 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVITION FORM THE MEAN(D2)**
370       D2 = X(K)-A
380 REM ** 4(B): COMPUTE THE ABSOLUTE VALUE (D3) OF THE**
390 REM ** DEVIATION FROM THE MEAN (D2)**
400       D3 = ABS(D2)
410 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM ABSLOUTE DEVATIONS FROM**
420 REM ** THE MEAN (S2) BY ADDING THE VALUE OF THE CURRENT**
```

```
430 REM ** ABSOLUTE DEVIATION FROM THE MEAN (D3) TO THE**
440 REM ** LAST (S2).**
450        S2 = S2 + D3
460 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW**
470 REM ** X HAS BEEN ADDED**
480        K=K+1
490 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
500 REM ** THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
510        IF K<=N THEN GOTO 370
520 REM ** 5. COMPUTE THE MEAN DEVIANTION (D1)**
530        D1 = S2/N
540 REM ** 6. PRINT THE MEAN DEVIATION (D1) **
550        PRINT 'THE MEAN DEVIATION IS':D1
560 REM ** END THE PROGRAM **
570        END
```

مثال قام ستة طلاب بالتسجيل على الساعات المعتمدة الآتية في احد الفصول الدراسية: 9 ,12 ,6 ,15 ,3 ,18 . احسب الانحراف المتوسط لهذه الساعات.

الحل: أدخل البيانات المذكورة اعلاه مرتبة على النحو التالي:

```
6
9
12
6
15
3
18
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE MEAN DEVIATION IS 4.5
```

مثال قام قسم السيطرة النوعية في احد مصانع انتاج المربيات بأخذ عشرة عينات عشوائية لاوزان علب المربيات التي تزن عادة 250 غراماً ووجد أن اوزانها كما يأتي: 260، 255، 262، 245، 240، 242، 238، 254، 265، 250 احسب الانحراف المتوسط لهذه الاوزان.

الحل: أدخل البيانات المذكورة اعلاه مرتبة على النحو التالي:

```
10
260
255
262
245
240
242
238
254
265
249
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE MEAN DEVIATION IS 8.2
```

4-2 حساب التباين لمجموعة من الاعداد

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب التباين Variance لسلسلة من نقاط البيانات X_1، X_2، ... إلى X_N عددها N ومتوسطها m باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - m)^2}{N}$$

خوارزمية الحل:

1- عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.

2- تأكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.

3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة البيانات، وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).

4- احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات (N) كما يأتي:

(أ) عين الانحراف عن المتوسط (D) لكل نقطة بيانات (X) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) لهذه السلسلة من كل نقطة بيانات (X).

(ب) عيّن مربع الانحراف عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات وذلك بتربيع قيمة الانحراف الذي حصلت عليه من الخطوة (أ) ولكل نقطة بيانات.

(جـ) احسب محموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2).

5- احسب التباين (V) للسلسلة وذلك بقسمة مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) على عدد نقاط البيانات (N).

6- قرّب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة.

8- توقف وانه البرنامج.

البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE VARIANCE **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
050      DIM X(400)
```

```
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070       INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
090       IF N< 1 THEN END
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
110       IF N> 400 THEN END
120 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140       S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY**
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170       K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF NEXT X**
190       INPUT X(K)
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY**
210 REM ** ADDING THE LAST X**
220       S = S + X(K)
230 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A**
240 REM ** NEW X HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
250       K = K + 1
260 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN **
270 REM ** ADDED THEN GO BACK TO GET ANOTHER;OTHERWISE **
280 REM ** CONTINUE**
290       IF K< = N THEN GOTO 190
300 REM ** 3(B): COMPUTE THE ARITHMTIC MEAN (A)**
310       A = S/N
320 REM ** 4.COMPUTE THE SUM OF THE SQUARED DEVIATIONS**
330 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS**
340 REM ** SET THE ACCUMULATOR (S2) TO ZERO**
350       S2 = 0.0
360 REM ** RESET K TO 1 **
```

```
370        K=1
380 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVIATION FROM THE MEAN (D)**
390        D=X(K)-A
400 REM ** 4 (B):COMPUTE THE SQUARED DEVIATION FROM (D2)**
410        D2=D*D
420 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF SQUARED DEVIATIONS **
430 REM ** FROM THE MEAN (S2)**
440        S2 = S2 + D2
450 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
460 REM ** X HAS BEEN ADDED **
470        K=K+1
480 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN **
490 REM ** ADDED THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
500        IF K<=N THEN GOTO 390
510 REM ** 5. COMPUTE THE VARIANCE (V) **
520        V= S2/N
530 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VARIANCE TO THE **
540 REM ** NEAREST THIRD DECIMAL PLACES**
550        V = INT (V*1000 + 0.5)/1000
560 REM ** 7. PRINT THE VARIANCE (V)**
570        PRINT "THE VARIANCE IS":V
580 REM ** 8. END THE PROGRAM **
590        END
```

مثال قام احد مدرسي مادة الرياضيات باجراء اختبار لعشرين طالباً وكانت علاماتهم التي حصلوا عليها كما يأتي: 67، 85، 92، 64، 53، 32، 65، 64، 73، 52، 88، 79، 67، 64، 52، 82، 93، 70، 60، 50 . احسب مقدار التباين لهذه العلامات.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

20
67
85
92
64
53
32
65
64
73
52
88
79
67
64
52
82
93
70
60
50

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE IS 235.64

مثال : قامت احدى دوريات مرور الطرق الخارجية باجراء مسح لمعرفة سرعة السيارات على الطرق السريعة حيث حصلت على النتائج التالية: 95، 80، 113، 122، 79، 80، 92، 130، 105، 65، 78، 65. احسب مقدار التباين لهذه السرع.

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

12
95
80
113
122
79
80
92
130
105
65
78
65

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE IS 422.833

5-2 حساب الانحراف المعياري لمجموعة من الاعداد

النص الرياضي للمسالة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المعياري standard deviation لسلسلة من نقاط البيانات X_1، X_2، ... إلى X_N عددها N ومتوسطها m باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-m)^2}{N}}$$

خوارزمية الحل:

1- عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.

2- تأكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.

3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة البيانات وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).

4- احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات (N) كما يأتي:

(أ) عين الانحراف عن المتوسط (D) لكل نقطة بيانات وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) السلسلة من كل نقطة بيانات (X).

(ب) عيّن مربع الانحرافات عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات وذلك بتربيع قيمة الانحراف عن المتوسط (D) الذي حصلت عليه من الخطوة (أ).

(جـ) احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2).

5- احسب الانحراف المعياري (D3) السلسلة وذلك بأخذ الجذر التربيعي للمقدار الناتج من قسمة مجموع مربعات الانحرافات على عدد نقاط البيانات.

6- قرب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة.

8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE STANDARD DEVIATION **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS.**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
```

```
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070      INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END PROGRAM **
090      IF N< 1 THEN END.
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM **
110      IF N> 400 THEN END
120 REM ** 3. COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) **
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140      S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY **
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170      K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF THE NEXT X**
190      INPUT X(K)
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY ADDING, **
210 REM ** THE CURRENT VALUE X(K) TO THE PREV. VALUE (S)**
220      S = S + X(K)
230 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
240 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
250      K = K + 1
260 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED THEN **
270 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
280      IF K <= N THEN GOTO 190
290 REM ** 3 (B) COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
300      A = S/N
310 REM ** 4. COMPUTE THE SUM OF THE SQUARED DEVIATIONS**
320 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS. **
330 REM ** SET THE ACCUMULATDR (S2) TO ZERO**
340      S2 = 0.0
350 REM ** RESET THE COUNTR K TO 1**
360      K = 1
```

```
370 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVIATION FORM THE MEAN(D)**
380       D=X(K)-A
390 REM ** 4(B): COMPUTE THE SQUARED DEVIATION FROM (D2)**
400       D2=D*D
410 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF SQUARED DEVATIONS **
420 REM ** FROM THE MEAN (S2) **
430       S2=S2+D2
440 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
450 REM ** HAS BEEN ADDED**
460       K=K+1
470 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
480 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
490       IF K<=N THEN GOTO 380
500 REM ** 5. COMPUTE THE STANDARD DEVIATION (D3)**
510       D3 = SQR (S2/N)
520 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST **
530 REM ** THIRD DECIMAL PLACES**
540       D3 = INT (D3 * 1000 + 0.5)/ 1000
550 REM ** 7. PRINT THE STANDARD DEVIATION (D3)**
560       PRINT "THE STANDARD DEVIATION IS":D3
570 REM ** 8. END THE PROGRAM **
580       END
```

مثال (1) احسب الانحراف المعياري للعلامات التالية: التي حصل عليها مجموعة من الطلاب: 65، 73، 45، 50، 75، 83، 79، 90، 61، 33، 40، 87.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

12
65
73
45
50
75

83
79
90
61
33
40
87

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE STANDARD DEVIATION IS 18.446

تمارين

1- قام احد المدرسين باحصاء غيابات عشرين تلميذاً عن احد الدروس لفصل كامل ووجد أن عدد ايام الغياب كانت كما يأتي: 5، 4، 8، 12، 0، 2، 1، 5، 3، 7، 10، 9، 0، 1، 1، 1، 2، 0، 3 . احسب متوسط mean عدد أيام الغيابات لهذا الدروس.

2- بلغ عدد الاخطاء الطباعية لخمس سكرتيرات عند طباعة احدى الرسائل كما يأتي: 7، 10، 4، 6، 5. احسب مقدار التباين variance لهذه الاخطاء.

3- قام احد الصيادين بالاصطياد في احدى البحيرات لمدة اسبوعين حيث كانت حصيلة الصيد لتلك الفترة كما يأتي: 10، 7، 1، 3، 8، 12، 6، 4، 4، 3، 14، 9، 5، 2. احسب الوسيط median لعدد الاسماك التي تم اصطيادها .

4- بلغت الرواتب السنوية لخمسة موظفين في احدى الشركات كما يأتي:

11,000 $، 12,500 $، 7,800 $، 9,200 $، 10,000 $. احسب متوسط الانحراف mean deviation والانحراف المعياري standard deviation لهذه الرواتب.

6-2 حساب الوسط الحسابي لبيانات مترابطة Mean

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الحسابي arithmetic mean لاحد جداول التكرار (frequency table) الذي يتكون من مجموعة من الفئات (classes) عددها (M) ذات علامات فئة (class marks) هي X_1، X_2، ... إلى X_M ولكل منها تكرار (frequency) هو F_1، F_2، ... إلى F_m. استخدم لحساب المتوسط الحسابي الصيغة الرياضية التالية:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{M} X_i F_i}{\sum_{i=1}^{M} F_i}$$

خوارزمية الحل:

-1 عيّن العدد (M) الذي يمثل عدد الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.

-2 تأكد من أن (M) يساوي 1 أو أكبر.

-3 احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كما يأتي:

(أ) احسب نقطة الوسط (midpoint) لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الادنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.

(ب) احسب مجموع نواتج ضرب (P) كل نقطة وسط لاية فئة مضروبا في تكرارها.

(جـ) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.

```
230 REM ** MIDPOINT (X) AND ITS ASSOCIATED FREQUENCY (F) BY**
240 REM ** ADDING TO THE PREVIOUS SUM **
250       P = P + (X*F)
260 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S)**
270       S = S+F
280 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (K) TO SHOW THAT A NEW**
290 REM ** SET OF BOUNDS AND FREQ. S HAS BEEN ADDED**
300       K = K+1
310 REM ** CHECK IF ALL SETS OF BOUNDS HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
320 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
330       IF K<M THEN GOTO 190
340 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
350       A = P/S
360 REM ** 4. ROUND THE RESULT TO THE NEAREST TAIRD DECIMAL PLACES **
370       A = INT (A*1000 + 0.5)/1000
380 REM ** 5. PRINT THE ARITHMETIC MEAN**
390       PRINT "THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS":A
400 REM ** 6. END THE PROGRAM **
410       END
```

مثال احسب الوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة

حدود الفئة	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
56-55	2

(د) احسب الوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة P على S.

4- قرب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية

5- اطبع النتيجة

6- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE ARITMETIC MEAN OF A **
020 REM ** FREQUENCY TABLE **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND **
040 REM ** UPPER (U) CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCY **
050 REM ** OF THE FREQUENCY TABLE**
060        INPUT M
070 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
080        IF M < 1 THEN END
090 REM ** 3.COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE **
100 REM ** USE THE COUNTER K TO COUNT CLASS BOUNDS AND **
110 REM ** FREQUENCIES (L, U, F), AND SET IT TO ZERO INITIALLY **
120        K = 0
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR (P) OF CLASS MIDPIONTS TO ZERO **
140        P = 0.0
150 REM ** SET THE ACCUMULATOR (S) OF THE SUM OF FREQ.S TO ZERO  **
160        S = 0.0
170 REM ** ENTER THE VALUES OF THE NEXT LOWER BOUND, UPPER **
180 REM ** BOUND, AND FREQUENCY (L, U, F) **
190        INPUT L, U, F
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
210        X =(U+L)/2.0
220 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS **
```

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6
5, 15, 3
15, 25, 10
25, 35, 8
35, 45, 12
45, 55, 6
55, 65, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS 33.415

مثال أحسب الوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة ادناه.

التكرار (F)	حدود الفئة
3	30-20
5	40-30
4	50-40
8	60-50
2	70-60
1	80-70
6	90-80
2	100-90

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8
20, 30, 3
30, 40, 5
40, 50, 4
50, 60, 8
60, 70, 2
70, 80, 1
80, 90, 6
90, 100, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS 57.259

7-2 حساب متوسط الانحراف لبيانات مترابطة

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب متوسط الانحراف Mean Deviation (M. D.) لاحد جداول التكرار (frequency table) الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسط الفئوية (class midpoints) عددها (M) وهي X_1، X_2، ....الى X_M، ولكل منها تكرار (frequency) هو F_1، F_2، ...الى F_M على الترتيب ولها متوسط حسابي (m). استخدم لحساب متوسط الانحراف الصيغة الرياضية التالية:

$$M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{M} |X_i - m| F_i}{\sum_{i=1}^{M} F_i}$$

خوارزمية الحل

1- عين العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper boud) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.

2- تاكد من ان (M) يساوي 1 أو اكبر.

3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كما يلي:

(أ) احسب نقطة الوسط (mid point) لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الادنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.

(ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروبة في تكرارها.

(د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة P على S.

4- احسب بسط الصيغة الرياضية (S2) وذلك بجمع حاصل ضرب الانحراف المطلق لنقاط الوسط (X) عن المتوسط الحسابي(A)مضروبا في التكرارات المصاحبة لكافة الفئات والتكرارات.

(أ) عين الانحراف المطلق (D3) لكل نقطة وسط (X) عن المتوسط الحسابي (A) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) من نقطة الوسط (X) ثم أخذ القيمة المطلقة النتيجة.

(ب) عين الانحراف المطلق عن المتوسط الحسابي X التكرار المصاحب (D2) وذلك بضرب الانحراف المطلق (D3) الذي حصلت عليه من الخطوة (أ) أعلاه في التكرار المصاحب (F) لنقطة وسط الفئة.

(هـ) احسب البسط (S2) في الصيغة الرياضية وذلك بجمع الانحرافات المطلقة مضروبة في التكرارات (D2) التي حصلت عليها من الخطوة (ب) أعلاه.

5- احسب متوسط الانحراف (D1) للجدول وذلك بقسمة (S2) على (S).

6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية

7- اطبع النتيجة

8- توقف وانه البرنامج

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE MEAN DEVIATION OF A FREQ. TABLE **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X AND F WILL BE A VECTOR **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS **
040 REM ** note that the choice of 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
050        DIM X (400), F(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
070 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCES (F)**
080        INPUT M
```

```
090 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
100       IF M<1 THEN END
110 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
120       IF M > 400 THEN END
130 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE **
140 REM ** SET THE COUNER (J) TO 1 INITIALLY**
150       J=1
160 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
170       P=0.0
180 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO
190       S=0.0
200 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L,U,F)**
210       INPUT L, U, F(J)
220 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
230       X(J)=(L+U)/2.0
240 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
250 REM ** MIDOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCY BY ADDING**
260 REM ** TO THE PREVIOUS SUM**
270       P=P+(X(J)*F(J))
280 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY ADDING**
290 REM ** THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS VALUE (S)**
300       S=S+F(J)
310 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
320 REM ** OF DATA POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
330       J=J+1
340 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
350 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
360       IF J<=M THEN GO TO 210
370 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
380       A = P/S
390 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (S2)**
```

```
400 REM ** RESET (S2) TO ZERO**
410      S2 = 0.0
420 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1**
430      J=1
440 REM ** 4(A): COMPUTE THE ABSOLUTE DEVIATION (D3)**
450      D3 = ABS(X(J)-A)
460 REM ** 4(B): COMPUTE (D2)**
470      D2 = D3 * F(J)
480 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF THE ABSOLUTE DEVIATIONS**
490 REM ** TIMES FREQUENCIES (S2) BY ADDING THE CURRENT**
500 REM ** VALUE OF ABS. DEV. TIMES FREQ. (D2) TO THE PREVIOUS (S2)**
510      S2=S2 + D2
520 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW**
530 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED**
540      J=J+1
550 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
560 REM ** THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
570      IF J<=M THEN GOTO 450
580 REM ** 5. COMPUTE THE MEAN DEVIATION (D1)**
590      D1 = S2/S
600 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**
610 REM ** THIRD DECIMAL PLACES**
620      D1 = INT(D1*1000 + 0.5)/1000
630 REM ** 7. PRINT THE MEAN DEVIATION (D1)**
640      PRINT 'THE MEAN DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS':D1
650 REM ** 8. END THE PROGRAM**
660      END
```

مثال احسب متوسط الانحراف للبيانات المترابطة المبينة ادناه.

حدود الفئة	التكرار F
15-05	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

6
5, 15, 2
15, 25, 10
25, 35, 8
35, 45, 12
45, 55, 6
55, 65, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS 11.0

مثال احسب المتوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة ادناه

حدود الفئة	التكرار F
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8
20, 30, 3
30, 40, 5
40, 50, 4
50, 60, 8
60, 70, 2
70, 80, 1
80, 90, 6
90, 100, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATIONT OF THE FREQ. TABLE IS 17.753



النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب التباين variance لاحد جداول التكرار (frequency table) الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسط الفئوية (class midpoints) عددها(M) وهي X_1, X_2، ... الى X_M. ولكل منها تكرار (frequency) هو F_1, F_2، .... الى F_M على الترتيب، ولها متوسط حسابي (m) . استخدم لحساب التباين الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{M}(X_i - m)^2 F_i}{\sum_{i=1}^{M} F_i}$$

خوارزمية الحل

-1 عين العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.

-2 تأكد من أن (M) يساوي 1 أو اكبر.

-3 احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كمايأتي:

(أ) احسب نقطة الوسط لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الادنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.

(ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروبا في تكرارها.

(جـ) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.

(د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة (P) على (S).

-4 احسب بسط الصيغة الرياضية (D3) وذلك بجمع حاصل ضرب مربعات الانحرافات لنقاط الوسط (X) عن المتوسط الحسابي (A)مضروبا في التكرار المصاحب لكافة الفئات والتكرارات في الجدول كما يأتي:

(أ) عين الانحراف (D1) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) وذلك بطرح المتوسط (A) من نقطة الوسط (X).

(ب) عين مربع الانحراف (D2) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) وذلك بتربيع القيمة (D1) التي حصلت عليها من الخطوة (أ) أعلاه.

(جـ) احسب مجموع (D3) مربعات الانحرافات مضروبا في الترددات المصاحبة وذلك بضرب مربعات الانحرافات (D2) في التردد المصاحب لها (F).

-5 احسب التباين بقسمة (D3) على (S).

-6 قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة

8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE VARIANCE OF A FREQ. TABLE**
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X & F WILL BE A VECTOR **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
050        DIM X(400), F(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
070 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCIES (F)**
080        INPUT M
090 REM ** 2. CHECK N; IF IT ISLESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
100        IF M<1 THEN END
110 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
120        IF M>400 THEN END
130 REM ** 3. COMPUTE THE ARITNMETIC MEAN (A) OFTHE FREQ. TABLE**
140 REM ** SET THE COUNTER (J) TO 1 INITIALLY**
150        J = 1
160 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
170        P = 0.0
180 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
190        S = 0.0
200 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L, U, F)**
210        INPUT L, U, F(J)
220 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
230        X(J) = (L + U)/2.0
240 REM ** 3(B): COMPUT THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
250 REM ** MIDPOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCIES BY ADDING**
260 REM ** TO THE PREVIOUS SUM**
```

```
270       P = P + (X(J) * F(J))
280 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY ADDING**
290 REM ** THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS VALUE (S)**
300       S= S + F(J)
310 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
320 REM ** OF DATA POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
330       J = J + 1
340 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
350 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
360       IF J<=M THEN GOTO 210
370 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
380       A = P/S
390 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (D3)**
400 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (D3) TO ZERO **
410       D3 = 0.0
420 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1 **
430       J = 1
440 REM ** 4(A): COMPUTE THE DVIATION (D1)**
450       D1 = (X(J)-A)
460 REM ** 4(B): SQUARE THE DEVIATION (D1) AND PUT THE **
470 REM ** RESULT IN (D2) **
480       D2 = D1**2
490 REM ** 4(C): MULTIPLY THE SQUARED DEVIATION (D2) BY ITS **
500 REM ** FREQUENCY AND ACCUMULATE THE SUM OF RESULTS **
510       D3 = D3 +(D2 * F(J))
520 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW **
530 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED **
540       J = J + 1
550 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **
560 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
570       IF J<= M THEN GOTO 450
```

```
580 REM ** 5. COMPUTE THE VARIANCE (V) **
590      V = D3/S
600 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST THIRD **
610 REM ** DECIMAL PLACES **
620      V = INT (V * 1000 + 0.5)/1000
630 REM ** 7. PRINT THE VARIANCE (V)**
640      PRINT THE VARIANCE OF THE FREQ. TABLE IS:V
650 REM ** 8. END THE PROGRAM **
660      END
```

مثال احسب التباين البيانات المترابطة المبينة ادناه.

حدود الفئة	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل: ادخل البيانات على الصيغة التالية:

```
6
5 , 15, 2
15, 25, 10
25, 35, 8
35, 45, 12
45, 55, 6
55, 65, 2
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE VARIANCE   THE FREQ. TABLE IS  164.342
```

مثال : احسب التباين للبيانات المترابطة المبينة ادناه

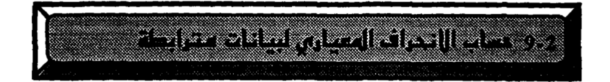
حدود الفئة	التكرار (F)
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

```
8
20, 30, 3
30, 40, 5
40, 50, 4
50, 60, 8
60, 70, 2
70, 80, 1
80, 90, 6
90, 100, 2
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE VARIANCE THE FREQ. TABLE IS 456.191
```



النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المعياري لاحد جداول التكرار الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسط الفئوية (class midpoints) عددها(M) وهي X_1، X_2، ...الى X_M. ولكل منها تكرار هو F_1 ، F_2.....الى F_M على الترتيب، ولها متوسط

حسابي (m). استخدم الصيغة الرياضية التالية لحساب الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}(X_i - m)^2 F_i}{\sum_{i=1}^{M} F_i}}$$

خوارزمية الحل

1- عين العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا(upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.

2- تأكد من أن (M) يساوي 1 أو اكبر.

3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كما يأتي:

(أ) احسب نقطة الوسط لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الادنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.

(ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروبا في تكرارها.

(هـ) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.

(د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة (P) على (S).

4- احسب بسط الصيغة الرياضية (D3) وذلك بجمع حاصل ضرب مربعات الانحرافات لنقاط الوسط (X) عن المتوسط الحسابي (A) مضروبا في التكرار المصاحب لكافة الفئات والتكرارات في الجدول كما يأتي:

(أ) عين الانحراف (D2) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) ثم قم بتربيع القيمة الناتجة.

(ب) احسب مجموع (D3) مربعات الانحرافات مضروبا في الترددات المصاحبة، وذلك بضرب مربع الانحراف (D2) مضروبا في التردد

المصاحب له (F) ثم جمع نتائج هذه العمليات لكافة الفئات والترددات في الجدول، حيث يصبح (D3) هو بسط الصيغة الرياضية.

5- احسب الانحراف المعياري (S1) لجدول التكرار بقسمة (D3) على (S) ثم اخذ الجذر التربيعي للقيمة.

6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة

8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE STANDARD DEVIATION OF **
020 REM ** A FREQENCY TABLE **
030 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X & F WILL BE A VECTOR OF **
040 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
050 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
060        DIM  X(400), F(400)
070 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
080 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCIES (F)**
090        INPUT M
100 REM ** 2.CHECK M; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
110        IF M < 1 THEN END
120 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
130        IF M > 400 THEN END
140 REM ** 3.COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE**
150 REM ** SET THE COUNTER (J) TO 1 INITIALLY**
160        J = 1
170 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
180        P = 0.0
190 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
200        S = 0.0
```

```
210 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L, U, F)**
220      INPUT L, U, F
230 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
240      X(J) = (L + U)/2.0
250 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
260 REM ** MIDPOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCIES BY**
270 REM ** ADDING TO THE PREVIOUS SUM**
280      P = P + (X(J) * F(J))
290 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY **
300 REM ** ADDING THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS VALUE (S)**
310      S= S + F(J)
320 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
330 REM ** OF DATA  POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
340      J = J + 1
350 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA  HAVE NOT BEEN ADDED**
360 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
370      IF J<= M THEN GOTO 220
380 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
390      A = P/S
400 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (D3)**
410 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (D3) TO ZERO **
420      D3 = 0.0
430 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1 **
440      J = 1
450 REM ** 4(A): COMPUTE THE SQUARED DEVIATION (D2)**
460      D2 = (X(J)-A)**2
470 REM ** 4(B): MULTIPLY THE SQUARED DEVIATION (D2)  BY ITS **
480 REM ** FREQUENCY AND ACCUMULATE THE SUM OF RESULTS **
490      D3 = D3 +(D2 * F(J))
500 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW **
510 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED **
520      J = J + 1
530 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **
```

```
540 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
550        IF J<= M THEN GOTO 460
560 REM ** 5. COMPUTE THE STANDARD DEVIATION (S1) **
570        S1 = (D3/S)**0.5
580 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST  **
590 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
600        S1 = INT (S1 * 1000 + 0.5)/1000
610 REM ** 7. PRINT THE STANDARD DEVIATION **
620        PRINT 'THE STANDARD DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS':S1
630 REM ** END THE PROGRAM **
640        END
```

مثال احسب الانحراف المعياري للبيانات المترابطة المبينة ادناه.

حدود الفئة	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

```
6
15, 25, 10
25, 35, 8
35, 45, 12
45, 55, 6
55, 65, 2
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE STANDARD DEVITION OF THE FREQ. TABLE IS 12.820
```

مثال : احسب التباين للبيانات المترابطة المبينة ادناه

حدود الفئة	التكرار (F)
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8
20, 30, 3
30, 40, 5
40, 50, 4
50, 60, 8
60, 70, 2
70, 80, 1
80, 90, 6
90, 100, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE STANDARD DEVITION OF THE FREQ. TABLE IS 21.360

تمارين

1- تبين البيانات المدرجة ادناه توزيع أوزان صناديق البضائع الموجودة داخل احدى الحاويات:

حدود الفئة	التكرار (F)
250-200	4
300-250	7
350-300	10
400-350	12
450-400	2
500-450	1

احسب:

(أ) الوسط الحسابي (ب) متوسط الانحراف

(جـ) التباين (د) الانحراف المعياري

2- تبين البيانات المدرجة ادناه توزيع أعمار البطاريات الرصاصية محسوبة بالسنوات:

حدود الفئة	التكرار (F)
1.5-0.5	2
2.5-1.5	3
3.5-2.5	10
4.5-3.5	8
5.5-4.5	4
6.5-5.5	1

احسب:

(أ) الوسط الحسابي. (ب) متوسط الانحراف

(جـ) التباين. (د) الانحراف المعياري

10-2 حساب الوسط المرجح Weighted Mean

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط المرجح لمجموعات من نقاط البيانات هي N_1 ، N_2، الى N_k. لها متوسطات هي m_1 ، m_2،....الى m_k على الترتيب. استخدم الصيغة الرياضية التالية لحساب الوسط المرجح:

$$m_w = \frac{N_1 m_1 + N_2 m_2 + ... + N_k m_k}{N_1 + N_2 + ... + N_k}$$

خوارزمية الحل

-1 عين العدد (K) الذي يمثل ازواج سعات المجموعات والمتوسطات المصاحبة لها (N, M) المطلوب حساب المتوسط الموزون لها.

-2 تاكد من أن (K) يساوي 2 أو اكثر.

-3 احسب مجموع سعات المجموعات (S1)، ثم احسب مجموع (S2) حاصل ضرب سعة المجموعة في المتوسط المصاحب لها لكافة ازواج السعات والمتوسطات.

-4 احسب الوسط المرجح (W) بقسمة (S2) على (S1).

-6 قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

-7 اطبع النتيجة

-8 توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES WEIGHTED MEAN FOR A SERIES OF PAIRS**
020 REM ** OF GROUP SIZES AND ASSOCIATED ARITHMETIC MEANS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (K) OF PAIRS **
040        INPUT K
050 REM ** 2.CHECK K; IF IT IS LESS THAN 2 THEN END THE PROGRAM**
060        IF N < 2 THEN END
070 REM ** 3. COMPUTE (S1) & (S2)**
080 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO ZERO**
090 REM ** RESET S1 & S2 TO ZERO**
100        S1 = 0.0
110        S2 = 0.0
120 REM ** ENTER THE NEXT PAIR OF GROUP SIZE & MEANS (N, M)**
130        INPUT N, M
140 REM ** COMPUTE THE GROUP SIZES (S1) BY ADDING THE CURRENT**
150 REM ** VALUE OF SIZE (N) TO THE PREVIOUS SUM (S1).**
160        S1 = S1 + N
170 REM ** COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (S2) OF GROUP SIZES AND**
180 REM ** ASSOCIATED MEANS**
190        S2 = S2 + (N*M)
200 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW PAIR**
210 REM ** HAS BEEN ADDED**
220        J = J + 1
230 REM ** CHECK IF ALL PAIRS OF DATA HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
240 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
250        IF J<K THEN GOTO 130
260 REM ** 4. COMPUTE THE WEIGHTED MEAN (W)**
270        W = S2/S1
280 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**
290 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
300        W = INT (W * 1000 + 0.5)/1000
310 REM ** 6. PRINT THE WEIGHTED MEAN (W) **
320        PRINT 'THE WEIGHTED MEAN IS':W
330 REM ** 7. END THE PROGRAM **
340        END
```

مثال بعد اجراء نفس الاختبار على مجموعتين من الطلاب في صف واحد، كانت النتائج كما يأتي:

حصلت المجموعة الاوي (40 طالباً) على متوسط مقداره (62)، بينما حصلت المجموعة الثانية (33 طالباً) على متوسط مقداره (58). احسب الوسط المرجح لهاتين المجموعتين.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

2
40, 62
33, 58

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE WEIGHTED MEAN IS 57.065

مثال قامت احدى الشركات الصناعية بتوزيع المكافآت بمناسبة انتهاء السنة الاولى من عمر الشركة، حيث حصلت المجموعة الاولى من العمال البالغ عددهم 50 عاملاً على 3500 دينار، بينما حصلت المجموعة الثانية من الموظفين البالغ عددهم 25 موظفاً على 1500 دينار. احسب الوسط المرجح للمكافآت المستلمة من كلا المجموعتين.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

2
50, 3500
25, 1500

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE WEIGHTED MEAN IS 2833.333

11-2 حساب الوسط التوافقي Harmonic Mean

النص الرياضي للمسالة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط التوافقي لمجموعة من نقاط البيانات هي X_1، X_2، ...الى X_N. باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$m_h = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_N}}$$

خوارزمية الحل

-1 عين العدد (N) الذي يمثل نقاط البيانات (X) المطلوب حساب المتوسط التوافقي لها.

-2 تأكد من أن (N) يساوي 1 أو اكبر.

-3 احسب مقام الصيغة الرياضية وذلك بجمع مقلوبات (S) نقاط البيانات:

-4 احسب الوسط التوافقي (H) بقسمة (N) على (S).

-5 قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

-7 اطبع النتيجة

-8 توقف وأنهِ البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE HARMONIC MEAN OF A **
020 REM ** SERIES OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF DATA POINTS (X) **
040       INPUT N
050 REM ** 2.CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
060       IF N < 1 THEN END
070 REM ** 3.COMPUTE THE SUM S OF THE RECIPROCALS OF DATA POINTS**
080 REM ** RESET THE COUNTER (K) TO ZERO**
```

```
090        K=0
100 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
110        S=0.0
120 REM ** ENTER THE NEXT DATA POINT (X)**
130        INPUT X
140 REM ** COMPUTE THE SUM (S) OF RECIPROCALS**
150        S=S+(1.0/X)
160 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
170 REM ** DATA POINT HAS BEEN ADDED**
180        K=K+1
190 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS  HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
200 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
210        IF K<=N  THEN GOTO 130
220 REM ** 4. COMPUTE THE HARMONIC MEAN (H)**
230        H=N/S
240 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST THIRD**
250 REM ** DECIMAL PLACES **
260        H=INT (H * 1000 + 0.5)/1000
270 REM ** 6. PRINT THE HARMONIC MEAN (H) **
280        PRINT 'THE HARMONIC MEAN IS':H
290 REM ** 7. END THE PROGRAM **
300        END
```

مثال قطعت احدى السيارات المسافة بين بغدادوسامراء بسرعة تساوي 100كم في الساعة، ثم عادت من سامراء إلى بغداد بسرعة 130 كم في الساعة. فإذا علمت أن المسافة بين بغداد وسامراء هي 120 كم، احسب متوسط سرعة السيارة من بغداد إلى سامراء وبالعكس.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

```
2
100
130
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE HARMONIC MEAN IS 113.043
```

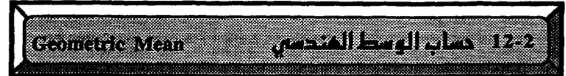
مثال قطعت احدى الطائرات المسافة بين المدينة (أ) والمدينة (ب) بسرعة 900كم في الساعة، ثم عادت من المدينة (ب) إلى (أ) بسرعة 750 كم في الساعة. احسب معدل السرعة لكامل الرحلة.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

```
2
900
750
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE HARMONIC MEAN IS 818.181
```



النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الهندسي لمجموعة من نقاط البيانات هي X_1X_2 ، ...الى X_N. باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$m_g = \sqrt[N]{X_1.X_2. \ ... \ .X_N}$$

خوارزمية الحل

1- عين العدد (K) الذي يمثل نقاط البيانات (P) المطلوب حساب المتوسط الهندسي لها.

2- تأكد من أن كلاً من (K) و (P) يساوي 1 أو اكبر.

3- عين حاصل الضرب (P2) الناتج من ضرب نقاط بيانات عددها (K)؛ أي احسب $P_1 \times P_2 \times ... \times P_K$ على أن تكون قيمة أية نقطة بيانات (P) اكبر من صفر.

4- احسب الوسط الهندسي (G) وذلك بأخذ الجذر (K) لناتج حاصل الضرب (P2)الذي حصلت عليه من الخطوة (3) أعلاه.

5- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة

8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE GEOMETRIC MEAN OF A SERIES **
020 REM ** OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (K) OF DATA POINTS (P) **
040       INPUT K
050 REM ** 2. CHECK K; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
060       IF K < 1 THEN END
070 REM ** 3. COMPUTE THE PRODUCT OF DATA POINTS IN THE SERIES**
080 REM ** RESET THE ACCUMULATOR OF PRODUCT (P2) TO 1**
090       P2 = 1.0
100 REM ** REST THE COUNTER (J) TO ZERO**
110       J= 0
120 REM ** ENTER THE NEXT DATA POINT**
130       INPUT P
140 REM ** CHECK P;IF IT IS EQUAL TO ZERO, THEN END THE PROGRAM**
150       IF P <= 0.0 THEN END
160 REM ** COMPUTE THE PRODUCT OF THE CURRENT DATA POINT (P)
170 REM ** AND THE PREVIOUS VALUE OF THE PRODUCT (P2)**
180       P2 = P2*P
190 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW DATA**
200 REM ** POINT HAS BEEN ADDED**
210       J = J + 1
220 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
230 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
240       IF J<>K THEN GOTO 130
250 REM ** 4. TAKE THE KTH ROOT OF THE PRODUCT (P2) TO GET**
260 REM ** THE GEOMETIC MEAN (G)**
270       G = P2 **(1.0/K)
280 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**
```

```
290 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
300        G = INT (G * 1000 + 0.5)/1000
310 REM ** 6. PRINT THE GEOMETRIC MEAN (G) **
320        PRINT 'THE GEOMETRIC MEAN IS';G
330 REM ** 7. END THE PROGRAM **
340        END
```

مثال احسب الوسط الهندسي لنقاط البيانات التالية: 5، 7، 11، 13، 16.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

```
5
5
7
11
13
16
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE GEOMETRIC MEAN IS 9.565

مثال يبين الجدول التالي قيم المبالغ التي قام بايداعها أحد الاشخاص في حسابه في البنك الاسلامي على مدى خمسة شهور. احسب الوسط الهندسي للمبالغ المودعة.

الشهر	المبلغ المودع (دينار)
نيسان	450
مارس	630
حزيران	330
تموز	725
آب	612

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

5
450
630
330
725
612

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE GEOMETRIC MEAN IS 529.214

تمارين

1- قام احد مندوبي المبيعات لاحدى الشركات بجولة لمدة أربعة أيام باستخدام سيارته الخاصة لتسويق احد المنتجات، حيث يقطع كل يوم 300 كم، وكان يسير بسرعة 90كم في الساعة في اليوم الاول والاخير من الرحلة، بينما كان يسير بسرعة 100 كم في الساعة في اليوم الثاني، و 120كم في الساعة في اليوم الثالث. ما هو معدل سرعته لكامل الرحلة؟.

2- في احدى المعاهدالتقنية كان هناك 25 طالباً في السنة الاولى قد حصلوا على معدل علامات 76، بينما حصل 40 طالباً في السنة الثانية على معدل 82، في حين كان معدل طلاب السنة الثالثة -الذين يبلغ عددهم 52 طالباً- هو 68. احسب معدل العلامات لكل فئة من الطلاب.

3- قام خمسة اشخاص بتسليم ما استحق عليهم من الزكاة إلى احدى الجمعيات الخيرية لغرض توزيعها على الفقراء، حيث كانت المبالغ التي سلموها كما يلي:

الشخص	المبلغ (دينار)
محمد	1450
أحمد	720
ياسين	650
طه	2300

احسب الوسط الهندسي للمبالغ المبينة

الفصل الرابع

العزوم والتفرطح

4-1) الالتواء (SKEWNES)

تعريف: وهو انتفاء التماثل، ومن الناحية الاحصائية هو عدم وجود تماثل، ويمكن قياسها عن طريق (سَ ، و، م).

حيث :-

$\bar{س}$ − م < ∴ ⇐ الالتواء سالب.

$\bar{س}$ − م > ∴ ⇐ الالتواء موجب.

ومقياس الالتواء هذا يسمى بمعامل الالتواء وهو قيمة نسبية غير متأثرة بوحدات القياس.

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:-

1) الوسط الحسابي ($\bar{س}$) والوسيط (و) والمنوال (م)

⇐ يعطينا معامل بيرسون الأول .

$$\alpha_1 = \frac{\bar{س} - م}{ع} \quad \text{.............................(4-1)}$$

$$\alpha_1 = \frac{3(\bar{س} - و)}{ع} \quad \text{.............................(4-2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{3(و - م)}{2ع} \quad \text{.............................(4-3)}$$

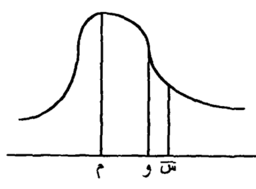
وهذه صور مختلفة من معامل بيرسون الأول

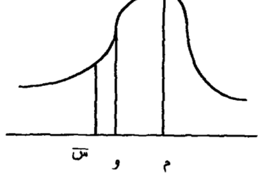
2) باستخدام الربيعات ($ر_1$) ، ($ر_2$) ، ($ر_3$)

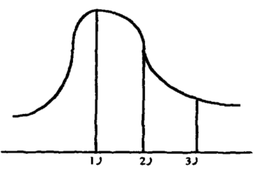
⇐ يعطينا معامل بيرسون الثاني

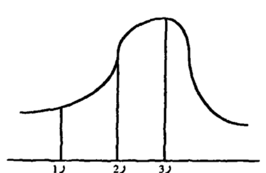
$$\alpha_2 = \frac{(ر_3 - ر_2) - (ر_2 - ر_1)}{ر_3 - ر_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{ر_3 - 2ر_2 + ر_1}{ر_3 - ر_1}$$









$ر_3 - ر_2 > ر_2 - ر_1$ ⇐ الالتواء موجب.

$ر_3 - ر_2 < ر_2 - ر_1$ الالتواء سالب.

مثال: جد معامل الالتواء بطرقه المختلفة لفئات الأجر التالية:

فئات الأجر	40-	60-	80-	100-	120-	المجموع
ت	8	12	20	8	2	50

علماً بأن:

سَ = 83.6، و= 85، م= 88، ر1 = 67.5، ر2 =و=85، ر3= 97.5، ع= 20.95

$$\alpha_1 = \frac{\bar{س} - م}{ع} = \frac{88 - 83.6}{20.95} = -0.21$$

$$\alpha_1 = \frac{3(\bar{س} - و)}{ع} = \frac{3(85 - 83.6)}{20.95} = -0.21$$

$$\alpha_1 = \frac{3(و - م)}{2ع} = \frac{3(88 - 85)}{2(20.95)} = -0.22$$

$$\alpha_2 = \frac{ر_3 - 2ر_2 + ر_1}{ر_3 - ر_1} = \frac{97.5 - 2(85) + 67.5}{97.5 - 67.5} = \frac{165 - 170}{30} = -0.2$$

واستخدم العلماء مبدأ العزوم (Momenis) للاستدلال على الالتواء، والعزم درجات، مما يقودنا لتعريف العز م الواوي

$$م_و = \sum (س_ر - أ) د(س_ر) \quad ....(4-6)$$

ويسمى (مو) بالعزم الواوي حول الثابت (أ) وقد يكون هذا الثابت:-

1) أ- صفر. وتسمى بذلك العزوم حول الصفر ويرمز لها بالرمز (مَو). فإذا كان:

و=1 ←

$$مَ_1 = \sum س_ر د(س_ر) = \bar{س} \quad ....(4-7)$$

$$مَ_1 = \sum س_ر د(س_ر) = \bar{س}$$

و = 2 ← $مَ_2 = \sum س_ر^2 د(س_ر) = ت(س^2)$

$$مَ_2 = \sum س_ر^2 د(س_ر) = ت(س^2) \quad ....(4-8)$$

و= 3 ← $مَ_3 = \sum س_ر^3 د(س_ر)$

$$مَ_3 = \sum س_ر^3 د(س_ر) \quad ....(4-9)$$

و = 4 ← $\bar{م}_4 = \sum س_ر^4 د(س_ر)$

$$\bar{م}_4 = \sum س_ر^4 د(س_ر) \qquad (10-4)$$

2) أ = $\bar{س}$. وتسمى بذلك العزوم حول الوسط الحسابي ويرمز لها بالرمز ($م_ر$) .

فإذا كان:-

و=1 ← $م_1$. $\sum (س_ر - \bar{س}) د(س_ر) =$ صفر

$$م_1 = \sum (س_ر - \bar{س}) د(س_ر) = \text{صفر} \qquad (11-4)$$

و=2 ← $م_2 = \sum (س_ر - \bar{س})^2 د(س_ر)$

$$م_2 = \sum (س_ر - \bar{س})^2 د(س_ر) = ع^2 \qquad (12-4)$$

و=3 ← $م_3 = \sum (س_ر - \bar{س})^3 د(س_ر)$

$$م_3 = \sum (س_ر - \bar{س})^3 د(س_ر) \qquad (13-4)$$

و=4 ← $م_4 = \sum (س_ر - \bar{س})^4 د(س_ر)$

$$م_4 = \sum (س_ر - \bar{س})^4 د(س_ر) \qquad (14-4)$$

وتستخدم هذه العزوم للتعبير عن ($\bar{س}$) ، ($ت^2$)، $ع^2$.

وبذلك فاننا نستطيع التعبير عن المعادلة:

$ع^2 = ت^2 - \bar{س}^2$ بطريقة العزوم حيث: $$ع^2 = ت^2 - \bar{س}^2 \qquad (15-4)$$

$ع^2 = م_2$ ، $ت^2 = \bar{م}_2$، $\bar{س} = \bar{م}_1$، وكذلك $ع^2 = م_2$، $ت^2 = \bar{م}_2$ ، $\bar{س} = \bar{م}_1$،

وبالتعويض في العلاقة (4-15) أعلاه:

$$\Leftarrow م_2 = \bar{م}_2 - \bar{م}_1$$

ويمكننا أيضا ايجاد قيمة ($م_3$) بنفس الطريقة:

$$م_3 = \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^3$$

$$= \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر^3 - 3 س_ر^2 \bar{س} + 3 س_ر \bar{س}^2 - \bar{س}^3\right)$$

$$= \frac{1}{ن} \left[\sum س_ر^3 - 3\bar{س} \left(\sum س_ر^2\right) + 3\bar{س}^2 \left(\sum س_ر\right) - \sum \bar{س}^3 \right]$$

$$= \frac{1}{ن} \left[س_ر^3 - 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر^2\right) + 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2 \left(\sum س_ر\right) - ن\left(\frac{\sum س_ر}{ن}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{\sum س_ر^3}{ن} - 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\frac{\sum س_ر^2}{ن}\right) + 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^3 - \left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^3$$

$$م_3 = مَ_3 - 3 مَ_1 \times مَ_2 + 2 مَ_1^3 \qquad \text{.......................(16-4)}$$

ويمكننا ايضا ايجاد ($م_4$) وبنفس الطريقة

$$م_4 = \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^4$$

$$= \frac{1}{ن} \sum \left(س^4 - 4 س_ر^3 \bar{س} + 6 س_ر^2 \bar{س}^2 + 4 س_ر \bar{س}^3 - \bar{س}^4\right)$$

$$= \frac{1}{ن} \left[\sum (س_ر^2) - 4\bar{س} \sum (س_ر^3) + 6\bar{س}^2 \left(\sum س_ر^2\right) - 4\bar{س}^3 \left(\sum س_ر\right) + ن\ \bar{س}^4 \right]$$

$$= \frac{1}{ن} \left[\sum س_ر^2 - 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر^3\right) + 6\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2 \left(\sum س_ر^2\right) - 4\left(\frac{\left(\sum س\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر\right) + ن\left(\frac{\sum س_ر}{ن}\right)^4 \right]$$

$$= \frac{\sum س_ر^2}{ن} = 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\frac{\sum س_ر^3}{ن}\right) + 6\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2 \left(\frac{\sum س_ر^2}{ن}\right)^2 - 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2 + \left(\frac{\left(\sum س_ر^4\right)}{ن}\right)$$

$$\acute{م}_4 - 4\ \acute{م}_1\ \acute{م}_3 + 6\ \acute{م}_1^2 \times \acute{م}_2 - 3\ \acute{م}_1^4$$

$$م_4 = \acute{م}_4 - 4\ \acute{م}_1\ \acute{م}_3 + 6\ \acute{م}_1^2 \times \acute{م}_2 - 3\ \acute{م}_1^4$$

وقد خلص العلماء من خلال ابحاث كثير في العزوم الى معامل الالتواء:-

$$\alpha_1 = \frac{م_3^2}{م_2^3}$$

حيث يأخذ α_1) اشارة ($م_3$) فاذا كانت :-

(α_1)=∴ ⇐ التوزيع متماثل

(α_1) < ∴ ⇐ الالتواء سالب

(α_1) > ∴ ⇐ الالتواء موجب

حيث α_1 ترمز الى معامل الالتواء

كما قادتهم لمعامل التفرطح والذي يرمز له بالرمز α_2

$$\alpha_2 = \frac{م_4}{م_2^2}$$

فاذا كان:-

(α_2) − 3 ⇐ المنخنى معتدل التفرطح

(α_2) > 3 ⇐ المنحنى مفرطح

(α_2) < 3 ⇐ المنحنى مدبب

والسبب في اخذ هذه القيم ان للتوزيع المعتاد

α_1 − ∴

α_2 − 3

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الاجر الاسبوعي لـ 50 عامل مبينة كما يلي:

فئات الاجر	40-	60-	80-	100-	140-120
التكرار	8	12	20	8	2

المطلوب : 1) ايجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول $\bar{س}$

2) ايجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر

3) معامل الالتواء ونوع الالتواء

4) معامل التفرطح ونوعه

الحل: نكون جدول الحل التالي.

الفئات	$ك_ر$	$س_ر$	$س_ر^2$	$س_ر^3$	$س_ر^4$
40-	8	50	2500	125000	6250000
60-	12	70	4900	343000	24010000
80-	20	90	8100	729000	65618000
100-	8	110	12100	1331000	14641000
120-	2	130	16900	2197000	28561000
المجموع	50				

فئات	$ك_ر$	$س_ر$	$س_ر ك_ر$	$س_ر^2 ك_ر$	$س_ر^3 ك_ر$	$س_ر^4 ك_ر$
40-	8	50	400	20000	1000000	50000000
60-	12	70	840	58800	4116000	288120000
80-	20	90	1800	162000	14580000	1312200000
100-	8	110	880	96800	10648000	11711280000
120-	2	130	260	33800	4394000	571220000
المجموع	50	-	4180	371400	34738000	3392820000

$ح_ر$	$ح_ر ك_ر$		$ح_ر^3 ك_ر$	$ح_ر^4 ك_ر$	$س_ر$	$س_ر ن_ر$
40−	320−	12800	512000−	20840000	2−	16−
20−	240−	4800	96000−	1920000	1−	12−
0	0	0	0	0	0	0
20	160	3200	64000	1280000	1	8
40	80	3200	128000	5120000	2	4
/	320	24000	416000	29160000	/	16−

$س_ر^2 ك_ر$	$س_ر^3 ك_ر$	$س_ر^4 ك_ر$	$(س_ر - \bar{س}) ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})^2 ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})^2 ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})^4 ك_ر$
32	64	128	−268.8	9031.68	303464.448	10196405.45
12	12−	12	−163.2	.2219	30185.472	410522.4192
0	0	0	128	819.2	5242.88	33554.432
8	8	8	211.2	5575.68	147197.952	3886025.933
8	16	32	212.8	4305.92	199794.688	9270473.523
60	52−	180		21952	685885.44	23796981.76

$$(1)\ \bar{م}_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر ك_ر = \frac{4180}{50} = 83.6$$

$$(2)\ \bar{م}_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^2 ك_ر = \frac{371400}{50} = 7428$$

$$(3)\ \bar{م}_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^3 ك_ر = \frac{34738000}{50} = 69476$$

$$(4)\ \bar{م}_ر = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^4 ك_ر = \frac{3392820000}{50} = 67856400$$

$$(5)\ \bar{م}_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح_ر ك_ر = \frac{-320}{50} + 90 = 83.6$$

$$(6)\ \bar{م}_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح_ر^2 ك_ر = \frac{204000}{50} = 480$$

$$(7)\ \bar{م}_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح_ر^3 ك_ر = \frac{-416000}{50} = -8320$$

$$(8)\ \bar{م}_4 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح_ر^4 ك_ر\ \frac{29160000}{50} = 583200$$

العزوم حول نقطة الأصل:

$$(9)\ \bar{م}_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر ك_ر\ \frac{-16}{50} = -.32$$

$$(10)\ \bar{م}_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^2 ك_ر = \frac{60}{50} = 1.2$$

$$(11)\ \bar{م}_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^3 ك_ر = \frac{-52}{50} = -1.04$$

$$(12)\ \bar{م}_4 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر^4 ك_ر = \frac{180}{50} = 3.6$$

العزوم حول الوسط الحسابي.

$$(13)\ م_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \bar{س}) ك_ر = .\because$$

$$(14)\ م_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \bar{س})^2 ك_ر = \frac{21952}{50} = 439.04$$

$$(15)\ م_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \bar{س})^3 ك_ر = \frac{685885.44}{50} = 13717.7088$$

$$(16)\ م_4 = \frac{1}{\sum ك} \sum (س_ر - \overline{س})^3 ك = \frac{23796981.76}{50} = 475939.6352$$

وعليه فان معامل الالتواء باستخدام العزوم

$$\alpha_1 = \frac{م_3^2}{م_2^3} = \frac{(13717.7088)^2}{(439.04)^3} = \frac{8 \times 1.8817551}{8462748} = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{م_4}{م_2^2} = \frac{475939.635}{(439.04)^2} = \frac{475939.635}{192756.12} = 2.47 < 3$$

وهذا يعني ان المنحنى مفرطح

الفصل الخامس

التوزيع الطبيعي

5-1 شكل المنحنى الطبيعي

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس ، وهو متماثل حول نقطة الوسط أي ان العمود النازل من اعلى نقطة في المحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى الي منطقتين متساويتين كما هو موضح بالشكل جانبا وهو يمثل التوزيع الطبيعي.

وهومن اهم التوزيعات الاحتمالية ومعادلته

$$ي_ر = \frac{1}{6\sqrt{\pi 2}} هـ \frac{1}{2} \left(\frac{س_ر - \mu}{\sigma}\right)^2$$

حيث: π النسبة التقريبية = $\frac{22}{7}$ أو 3.14

σ: الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي هـ : العدد النيبري = 2.718

μ: الوسط الحسابي للتوزيع $س_ر$: القيمة المقابلة للمشاهدة $س_ر$

5-2 : خصائص التوزيع الطبيعي

1- شكله يشبه الجرس

2- متماثل حول الوسط.

3- الوسط الحسابي - الوسيط- المنوال لهذا التوزيع

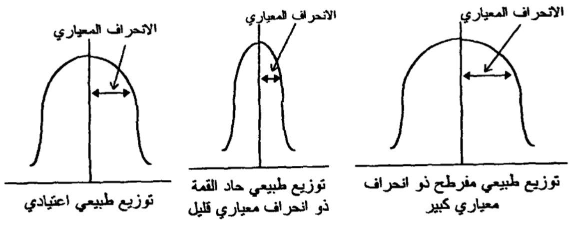
4- المساحة تحت المنحنى الطبيعي=1

5- تحديد نسبة أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع.

6- تقل قيمة ي كلما اتجهت س نحو ∞ ولكنها لا يمكن ان تصبح صفرا الا في اللانهاية وهذا غير ملموس.

وحتى يكون التوزيع الطبيعي توزيعا معياريا فيتوجب ان يكون متوسطه الحسابي صفرا وتباينه 1. لذا فان خواص التوزيع الطبيعي المعياري هي نفس خواص التوزيع الطبيعي الاصلي اللهم الا زيادة الشرط الاخير وهو ان يكون وسطه الحسابي = صفرا. وتباينه يساوي 1.

وهناك صور اخرى لمنحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على الانحراف المعياري للتوزيع. فكلما زاد الانحراف المعياري معنى ذلك انه الزيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي ولذا يزداد تفرطح المنحنى والاشكال التالية توضح هذا المفهوم:



5-3 جداول التوزيع الطبيعي للمساحات:

1) صممت هذه الجداول لتعمل على تخفيف عناء ايجاد مساحة معينة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

2) المساهمة في ايجاد احتمال اية مشاهدة من مشاهدات التوزيع الطبيعي غير المعياري وذلك بتحويل قيم المشاهدات الى درجات معيارية من العلاقة.

$$ى_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع_س}$$

لذا يتوجب معرفة الوسط الحسابي للتوزيع وانحرافه المعياري

3) يجب معرفة ان قيم $ى_ر$ للدرجات المعيارية واقعة بين $-4 \leq ى_ر \leq 4$ واية قيمة معيارية تزيد عن هذا الحد فيكون هناك خطأ حسابي.

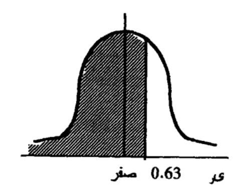
كيفية ايجاد المساحة تحت المنحنى باستخدام الجداول. نتبع الخطوات التالية:-

1) نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية حسب العلاقة:

$$ى_ر = \frac{س_ر - \bar{س}}{ع_س}$$

2- بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد القيم المقابلة حيث ان العمود الاول يمثل القيم المعيارية والافقي يشمل الجزيئات للقيم المعيارية وبعد القراءة الرأسية الى اسفل ثم افقي نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة والاحتمال المطلوب.

والجدول ادناه يمثل جزءا من الجدول الكلي ولو اردنا ايجاد القيمة المناظرة لـ ى= 0.63 ثم نقرأ رقم تقاطع القيمة الرأسية مع الافقية فتكون هي القيمة المناظرة ل ى= 0.63 ونلاحظ ان القراءة تشير الى 0.2357 وهذا يشير الى احتمال وقوع المشاهدة المناظرة ل $ى_ر$. وهي تمثل المساحة المشار لها في الشكل التالي ونلاحظ من الشكل ان الخط المار بنقطة ى= صفر يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين كل منهما 0.5000 وعند حساب مساحة تبدأ بالصفر. وتنتهي بقيمة ى فان المساحة المطلوبة هي القيمة المأخوذة من الجدول ادناه كما اسلفنا في المثال السابق.



اما اذا تصادف وجود قيمة معيارية سالبة فاننا نأخذ مثيلتها الموجبة ونجدها من الجدول باستخدام خاصية التماثل المحوري:

حيث ان الجدول صمم فقط للقيم المعيارية الموجبة. والمساحة المحصورة عادة تحددها معطيات السؤال.

ى	٫00	٫01	٫0200	٫03	٫04	٫05	٫06	٫07	٫08	٫09
0٫0	٫0000	٫0040	٫0080	٫0120	٫0160	٫0199	٫0229	٫0279	٫0319	٫0359
0٫1	٫0398	٫0438	٫0517	٫0557	٫0596	٫0636	٫0675	٫0714	٫0753	
0٫2	٫0793	٫0832	٫0871	٫0910	٫0948	٫0987	٫1026	٫1064	٫1103	٫1141
0٫3	٫1197	٫1217	٫1255	٫1293	٫1321	٫1368	٫1406	٫1443		٫1517
0٫4	٫1554	٫1591	٫1628	٫1664	٫1700	٫1736	٫1773	٫1808	٫1879	
0٫5	٫1915	٫150	٫1985	٫2019	٫2054	٫2088	٫2123	٫2157		٫2224
0٫6	٫2257	٫2291	٫2324	٫2357	٫2389	٫2422	٫2454	٫2486	٫2517	٫2549

5 – 4: تطبيق على المنحنى الطبيعي من خلال مسائل عملية:

يمكن اعطاء الأمثلة التالية لتغطي جميع ما ورد من ملاحظات:

مثال: أوجد الاحتمال لما يلي (مساحات المناطق المحددة بالقيم المعيارية)

أ – ل (ى > −1)   ب– ل (ى < 1)

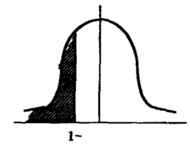
جـ- ل (0 < ى < 2.3)　　　　د - ل (-1.35 < ى < 2.38)

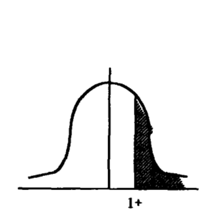
هـ- ل (1.42 < ى < 3.1)

الحل: نبدأ بحل مثل هذه الأسئلة برسوم توضيحية للمنحنيات لتحديد المساحة المطلوبة ثم ايجادها من الجداول المعطاة

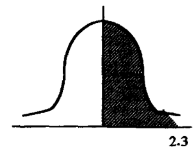
أ - ل (ى < -1) = 0.5000 - 0.3413 = 0.1587

= مساحة نصف المنحنى - المساحة الواقعة تحت ص = -1





ب- ل (ى > 1) = 0.5000 - 0.3413 = 0.1587

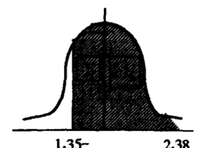


جـ- ل (0 < ى < 2.3) = 0.4893

د - ل (-1.35 < ى < 2.38)

= م1 + م2

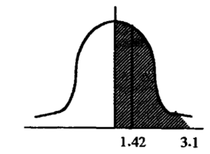
= 0.4115 + 4913. 0 = 0.9028



هـ- ل (1.42 < ى < 3.1)

= 0.4990 − 0.4222

= 0.0768



مثال: تقدم عشرون الف طالب لامتحان عام وكان توزيع علاماتهم قريبا في التوزيع الطبيعي، فاذا كان الوسط الحسابي للعلامات 70 والانحراف المعياري 5، فأوجد :-

1- عدد من تقع علاماتهم بين 70 − 80 درجة

2- عدد من تقع علاماتهم بين 65− 75 درجة

3- عدد من تقل علاماتهم عن 60

4- عدد من تزيد علاماتهم عن 80

5- عدد من تزيد علاماتهم عن 60

6- عدد الذين تقل علاماتهم عن 80 مع من تزيد او تساوي 80

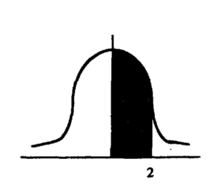
الحل:

1- $\text{ل}\left(\frac{70-70}{5} < \text{ى} < \frac{80-70}{5}\right)$

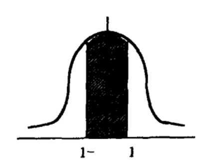
$= \text{ل}\left(\; < \text{ى} < \frac{10}{5}\right) = \text{ل}\left(\; < \text{ى} < 2\right)$

= 0.4773

عدد الطلاب= 4773ر× 20000= 9546 طالبا



2- ل $\left(\frac{70-65}{5} > \text{ى} > \frac{70-75}{5}\right)$



= ل (1- > ى > 1) = م1 + م2

= 0.3413 + 0.4313

= 0.6826

عدد الطلاب المطلوب = 0.6826 × 20000

= 13652 طالب

3- ل $\left(\text{ى} > \frac{60-70}{5}\right)$

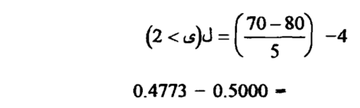
= ل (ى > -2)

= 0.5000 − 0.4773

= 0.0227

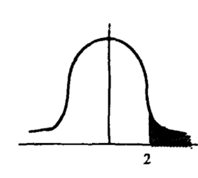
عدد الطلاب المطلوب = 20000×0.0227

= 454 طالبا



4- $\left(\frac{80-70}{5}\right) = \text{ل}(\text{ى} > 2)$

= 0.5000 − 0.4773



= 0.0227

عدد الطلاب المطلوب = 0.0227 × 20000

= 454 طالبا

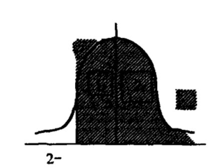
5- ل(ى < $\frac{70-60}{5}$) = ل(ص < 2-)

=0.4772+0.5000

= 0.9773

عدد الطلاب = 20000×0.9773

= 1546 طالبا

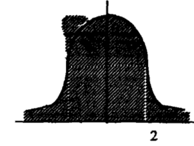


6- ل(ى < $\frac{70-80}{5}$) + ل(ى > $\frac{70-80}{5}$)

ل(ى < 2) + ل(ى > 2)

0227ر+9773ر=1

عددهم = 20000



اما اذا استخدمنا جدول التوزيع الطبيعي التجميعي نحسب الاحتمالات على النحو:

ولتوضيح هذا المفهوم نورد الأمثلة التالية:

مثال: احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول التوزيع المعتاد التجميعي:

(1)ح (-1< ي <1) =

(2) ح (-1.35 <ي <2.1)

(3) ح (1.2<ي< 3)

(4) ح(ي <1.2)

(5) ح(ي<2.4)

(6) ح (-2<ي<2)

الحل: (1) ح (-1<ي<1) =Ø(1) -Ø (-1) = 8413ر - 1587ر=6826ر

(2) ح (-1.35 < ي 2.1) = Ø (2.1) - Ø (-1.35)=

= 9821ر-0885ر=8936ر

(3) ح (1.2<ي<3) =Ø(3)-Ø (1.2)

= 9987ر - 8849ر=1138ر

(4) ح (ي×1.2) = 1-ح(ي< 1.2)

= 1-8849ر=1151ر

(5) ح(ي<2.49) = 1-9936ر=0064ر

(6) ح(-2<ي<2) = Ø (2) -Ø (-2)=

= 772ر-0228ر =9544ر

مثال: اذا علم ان علامات مجموعة من الطلاب في احد الكليات تخضع للتوزيع المعتاد (62، 49) فاذا اختير شخص ما بطريقة عشوائية ما احتمال انه قد حصل على علامة اكثر من 75.

الحل: μ= 62، σ^2 = 49، σ = 7، سر = 75

$$ح\left(ي > \frac{62-75}{7}\right) = ح\left(ي > \frac{13}{7}\right) = ح(ي > 1.86)$$

$$= 1 - ح(ي \leq 1.86) = 1 - Ø(1.86)$$

$$= 1 - 0.9686 = 0.0314$$

0.9686

1.86 ي = صفر

مثال: احسب الاحتمالات التالية:

(1) ح(ى> 2) (2) ح(1.4 < ى < 2.89) (3) ح (ى < -2.81)

(4) ح(-1.35 < ى < 1.73) (5) ح(0 < ى < 0.97)

(6) ح(ى < 2.1) (7) ح(ى < - 2.85)

الحل:

(1) ح(2>ي) = 1-Ø(2) = 1-9772ر= 0228ر

(2) ح (1.4>ي> 2.89) =Ø(2.89)-=Ø (1.4)=9881ر-9192ر=0789ر

(3) ح(ي<-2.81)=0025ر

(4) ح(-1.35> ي >1.73) = Ø (1.73) -Ø(-1.35)

=9582ر -0885ر =8697ر=0789ر

(5) ح(0>ي>197ر) =Ø (97ر)-Ø(0)=

(6) ح (ي>2.1) = Ø (2.1) = 9821ر

(7) ح(ي>-2.85)=1-Ø(-2.85) =1-0022ر

مثال: اذا كان عمر احد انواع البطاريات يتبع التوزيع المعتاد بمتوسط 3 سنوات وانحراف معياري نصف سنة فاذا اختير من هذا الانتاج بطارية واحدة عشوائية اوجد ح(س< 2.3 سنة)

الحل: μ= 3، $\sigma = \frac{1}{2}$ س< 2.3

$$ح\left(ي < \frac{2ر3-3}{\frac{1}{2}}\right) = ح\left(ي < \frac{2ر3-3}{5ر}\right) = ح\left(ي < \frac{7}{5}\right)$$

$ح(ي > -1.4) = \varnothing(-1.4) = 0808ر$

مثال: اذا علم ان علامات الطلاب في احد الكليات تتبع التوزيع الطبيـــعي حيـــث م (14، 8) والمطلوب حساب

(1) احتمال العثور على شخص له علامة اقل من 72.

(2) احتمال الحصول على علامة اكثر من 80

(3) احتمال ان تكون له علامة تتراوح بين 60 – 70

(4) اذا منح اعلى من 8٪ من الطلبة على تقدير ممتاز ما هي العلامة التي تخول الطالب للحصول على هذا التقدير.

(5) اذا اعتبر ما نسبته 12٪ من الطلبة راسباً ماهي علامة الرسوب.

الحل: $\mu = 64$، $\sigma = 8$

(1) $ح\left(ي < \frac{72-64}{8}\right) = ح(ي < 1) = \varnothing(1) = 8413ر$

(2) $ح\left(ي > \frac{80-64}{8}\right) = ح(ي > 2) = 1 - \varnothing(2)$

$= 1 - 99772ر = 0228ر$

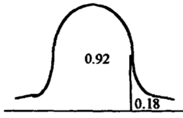
(3) $= ح(60 \leq ي \leq 70) = ح\left(\frac{60-64}{8} \leq ي \leq \frac{70-64}{8}\right)$

$= ح\left(\frac{-4}{8} \leq ي \leq \frac{6}{8}\right) = ح(-0.5 \leq ي \leq 0.75)$

$\varnothing(0.75) \quad \varnothing(0.5)$

$= 0.7734 - 0.3085 = 0.4649$

(4) $\text{ي} = \frac{\text{س}_\text{ر} - 64}{8}$



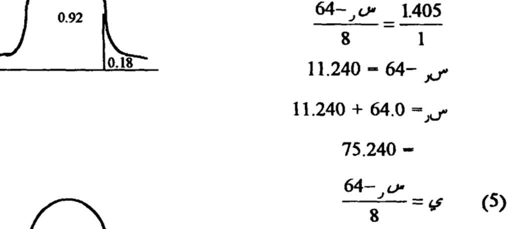
$\frac{1.405}{1} = \frac{\text{س}_\text{ر} - 64}{8}$

$\text{س}_\text{ر} - 64 = 11.240$

$\text{س}_\text{ر} = 64.0 + 11.240$

$= 75.240$

(5) $\text{ي} = \frac{\text{س}_\text{ر} - 64}{8}$



$\frac{-1.175}{1} = \frac{\text{س}_\text{ر} - 64}{8}$

$\text{س}_\text{ر} - 64 = -9.400$

$\text{س}_\text{ر} = -9.4 + 64$

$= +54.6$ علامة الرسوب

مثال: اذا علم ان للمتغير العشوائي س التوزيع المعتاد متوسطه $\mu = 50$ ، وتباينه $\sigma^2 = 100$

المطلوب ايجاد احتمال ان هذا المتغير يقع بين 45< س< 62

الحل: الاحتمال المطلوب $\text{ح}\left(\frac{45-50}{10} < \text{ي} < \frac{62-50}{10}\right) = \text{ح}(-0.5 < \text{ي} < 1.2)$

$= \varnothing(1.2) - \varnothing(-0.5)$

$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$

مثال: اذا علم ان احد انواع البطاريات يعمل حتى 3 سنوات بالمتوسط بانحراف معياري $\frac{1}{2}$ سنة فعلى اعتبار ان لعمر البطارية توزيع معتاد ماهو احتمال ان يحصل على بطارية تعمر فترة اقل من 2.3 سنة.

الحل: μ=3 سنة ، σ = 0.5

$$ح(س > 2.3) = ح\left(ي > \frac{3-2.3}{0.5}\right) = ح\left(ي > \frac{-0.7}{0.5}\right)$$

$$= ح(ي > -1.4) = \varnothing(-1.4) = 0.0808$$

مثال: اذا علم ان احد مصانع اللمبات يعمر بالمتوسط 800 ساعة وبانحراف معياري 40 ساعة اذا اخذت لمبة عشوائيا من انتاج هذا المصنع ما احتمال ان تحترق بين 834.778 ساعة .

الحل: μ= 800 ساعة ، σ =40 ساعة

$$ح(778 > س > 834) = ح\left(\frac{778-800}{40} > ي > \frac{834-800}{40}\right)$$

$$= ح\left(\frac{-22}{40} > ي > \frac{34}{40}\right)$$

$$= ح(-0.55 > ي > 0.85)$$

$$= \varnothing(0.85) - \varnothing(-0.55)$$

$$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$$

مثال: اذا كان متوسط العلامات في امتحان ما هو 74 علامة والانحراف المعياري 7 وبناء على صيغة التعبير عن العلامة المطلقة بالتقدير بالحرف وقرر المدرس ان يعطي تقدير أ لأعلى 12٪ من الطلبة.

المطلوب: على اعتبار ان للعلامات توزيع معتاد حساب اقل علامة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير

الحل: μ= 74 σ=7

نحسب أولاً القيمة المعيارية من المعطيات

$\varnothing$(ي) = 0.88

ي= 1.175

$$ي_ر = \frac{س_ر - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{1.175}{1} = \frac{س - 74}{7}$$

س-74=1.175×7=8.225

س=74+8.225=82.225

الخطوات التي اتبعت للحصول على النتيجة اعلاه:

- نرسم المنحنى لتوضيح المساحة الذي يقع ضمنها من سيحصلون على تقدير أ ومن الذين لن يحصلوا على هذا التقدير =1-0.12= 0.88
- نبحث من خلال الجدول التوزيع الطبيعي المعياري على القيمة المعيارية المقابلة للمساحة 0.88 فنجد انها تتوسط المساحة

0.8800

0.8810   0.8790

ي = 1.18   1.17

القيمة التي تقابل 0.88 هي:

$$\frac{1.17 + 1.18}{2} = 1.175$$

مثال: في تقييم نتائج الامتحان لاحد المساقات لعدد من الطلبة بلغ 120 طالبا وجد ان متوسط العلامات 64 والانحراف المعياري 8 فاذا اختير طالب عشوائيا

(1) ما هو احتمال ان تكون درجته اكبر من 70.

(2) ما هو احتمال ان تكون درجته بين (55، 80).

(3) ما هواحتمال ان يكون قد حصل على درجة اقل من 80.

(4) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة على الأكثر 75.

(5) اذا حدد ما نسبته 8٪ لمنحهم تقدير ممتاز ماهي ادنى درجة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير.

(6) ماهو عدد الطلبة المتوقع لأولئك الحاصلين على علامات اقل من 54.

الحل: $\mu = 64$ ، $\sigma^2 = 8 = 2.9$

$$0.7734 = (0.75)\text{ح} = (\text{ي}\,\text{د})\text{ح} = \left(\frac{64-70}{8} > \text{ي}\right)\text{ح} = (70- > \text{س})\text{ح} \therefore^{1} \alpha$$

$$(5.5 > \text{ي} > 3.8-)\text{ح} = \left(\frac{16}{8} > \text{ي} > \text{د}\frac{6-}{8}\right)\text{ح} = \left(\frac{64-80}{8} > \text{ي} > \text{د}\frac{64-55}{8}\right)\text{ح} =$$

$$(2 > \text{ي} > \text{د}1.125)\text{ح}$$

$$0.1292 - 0.9772 = (1.135-)\varnothing - (2)\varnothing$$

(3) $$= (2 > \text{ي})\text{ح}\left(\frac{64-80}{8} > \text{ي}\right)\text{ح} = (80 > \text{س})\text{ح}$$

$$0.9772 = (2)\varnothing$$

(4) $$(1.38)\varnothing - 0.9192 = (1.38 > \text{ي})\text{ح} = \left(\frac{64-75}{8} > \text{ي}\right)\text{ح} = (75 > \text{س})\text{ح}$$

(5) $$75.24 = 64 + 11.24 = \text{س} \quad 11.24 = 64 - \text{س}$$

(6) $$0.0968 = (1.3- > \text{ي})\text{ح} = \left(\frac{64-54}{8} > \text{ي}\right)\text{ح} = (54 > \text{س})\text{ح}$$

$$120 \times 0.0968(1.3-)\varnothing$$

مثال: اذا علم ان معدلات الكفاءة في احدى الكليات التي عدد طلابها 300 طالب تتبع توزيعا معتادا بمتوسط 2.1 وانحراف معياري 1.2 كم من هؤلاء الطلبة يتوقع ان تكون علاماته تتراوح بين 2.5–3.5 اذا علم ان التقريب هو لاقرب خانة عشرية.

الحل: ن= 300، µ= 2.1 ، σ =1.2

$$ح\left(\frac{2.1-2.5}{1.2} > ي > \frac{2.1-3.5}{1.2}\right) = ح\left(\frac{0.4}{1.2} > ي > \frac{1.4}{1.2}\right)$$

$$= ح(0.33 > ي > 1.17)$$

$$= \varnothing(1.17) - \varnothing(0.33)$$

$$= 0.8790 - 0.6293$$

$$= 0.247$$

عدد الطلاب = 0.2497 ×300

= 750 طالب

مسائل التقريب

المطلوب : تقريب الاحتمال باستخدام كل من جدول ذات الحدين واسلوب التقريب للتوزيع الطبيعي للعبارة ح (س=4، 15، 0.4)

ح(س=4، 15، 0.4) = ح(س≤4) –ح(س≤3)

مثال: اوجد بطريقة التقريب التوزيع المعتاد. احتمال

ح (3.5≤س≤4.5) حيث ن = 15،ح=0.4

µ= ت(س) = ن× ح = 15×0.4= 6.0

$$\sigma = \sqrt{ح(1-ح) \times ن} = \sqrt{15 \times 0.6 \times 0.4} = \sqrt{3.6} = 1.9$$

$$ح(3.5 > س > 4.5) = ح\left(\frac{6-3.5}{1.9}\right) > ي > \left(\frac{6-4.5}{1.9}\right)$$

$$= ح(-1.3) - ح(-0.9)$$

$$= \varnothing(0.79) - \varnothing(-1.3)$$

$$= 0.2148 - 0.0918 = 0.123$$

أسئلة عامة على المنحنى الطبيعي

س1 اعطيت احدى الشعب امتحانا في الاحصاء من عشر علامات، وكانت النتائج تتدرج من الصفر حتى (10) وكان متوسط علامات الطلاب في هذا الامتحان 6.5 والانحراف المعياري 1.5 فاذا افترضنا ان العلامات تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

1) حدد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على (7) علامات.

2) اكبر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المتدنية في الفصل.

3) اصغر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المرتفعة في الفصل.

س2 اخذت عينة مكونة من 200 انبوب من احدى مصانع الانابيب وكان متوسط قطر الانبوب 10 سم والانحراف المعياري 0.5 سم وكان استخدام هذا الانبوب يسمح بانحراف في القطر يتراوح اقصاه من 9.5 – 10.5 سم وفيما غير ذلك تعتبر الانابيب تالفة. اوجد النسبة المئوية للانابيب التالفة الناتجة في هذا المصنع على افتراض ان اقطار الانابيب تتوزع توزيعا طبيعيا.

س3 متوسط طول 400 شجرة سرو 7م والانحراف المعياري 0.8 م فاذا فرضنا ان الاطوال تتوزع توزيعا طبيعيا فاوجد ما يلي:-

1- عدد الاشجار التي اطوالها بين 6-7.5م

2- عدد الاشجار التي تزيد اطوالها عن 8م

س4 اذا كان متوسط اعمار البدلات التي تستوردها المؤسسة العسكرية للجنود 36

شهرا والانحراف المعياري 6 شهور وكان عمر البدلات يأخذ شكل التوزيع الطبيعي فاذا استوردت المؤسسة 5000 بدلة فكم بدلة تحتاج الى الاستبدال بعد 30 شهراً.

س5 اذا كانت وزارة التعليم العالي تمنح لاعلى 4٪ من طلبة كليات المجتمع في الفحص الشامل بعثات دراسية وكانت علامات طلاب الكلية قريبة من توزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 غما هي اقل علامة تحصل على بعثة دراسية.

س6 الازواج التالية هي قيم معيارية تحصر بينها جزءا من مساحة المنحنى المطلوب ايجاد المساحة الواقعة خارج كل زوجين.

أ- (‎-1.8، 1.8)‎ ب- (‎-1.6، 1.6)‎ جـ (‎-2.28، 2.28)‎

س7 جد المساحة المحصورة بين كل زوج من القيم المعيارية التالية:-

أ- (‎-0.4، 0.4)‎ ب- (‎-0.6، 0.6)‎ جـ (‎-1.2، 1.2)‎

س8 جد المساحة الموجودة الى يمين كل من القيم المعيارية التالية :

أ) ‎-1.3‎ ب) ‎-1‎ ج) 1.2 د) ‎-0.8‎

س9 جد المساحة الموجودة الى يسار كل من القيم المعيارية التالية :

أ) 1.5 ب) 0.8 ج) صفر د) ‎-0.5‎

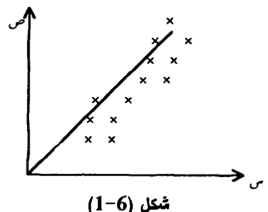
الفصـــل السادس

الارتباط والانحدار

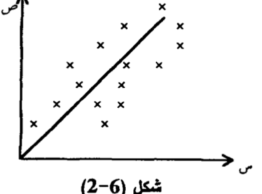
6-1) طريقة جداول الانتشار

حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لابد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

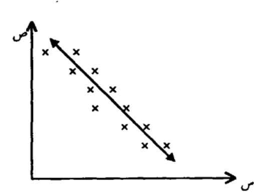
- نرسم احداثيين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة س وعلى المحور الرأسي الظاهرة ص.
- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير س والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير ص.
- نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



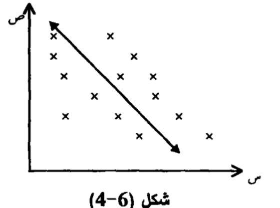
شكل (6-1)
نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي (طردي) قوي



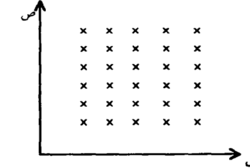
شكل (6-2)
نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة خطية طردية (موجبة) ولكنها ضعيفة



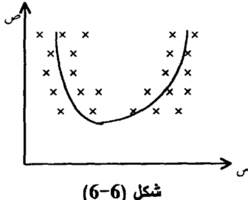
شكل (6-3)
نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة قوية



شكل (6-4)
نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة ضعيفة



شكل (6-5)
أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص



شكل (6-6)
أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فاننا نقول أن العلاقة ليست خطية وانما من الدرجة الثانية

6-2) معامل الارتباط وخصائصه

كما اسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز ر وهذا سيتخذ قيمة عددية تتراوح بين $-1 \leq$ ر ≤ 1 واذا وجد قيمة اكبر او اصغر من هذه الحدود دلالة على ان هناك خطأ حسابي قد تم، وللمعامل دلالات نوردها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

1) اذا كانت ر = -1 فان العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.

2) اذا كانت $-1 < ر < 0$ فان العلاقة تكون علاقة عكسية.

3) اذا كانت ر = صفر. فهذا يعني انه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين.

4) اذا كانت $0<ر<1$ فهذا يعني انه يوجد علاقة ايجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.

5) عندما تكون ر = 1 فان العلاقة تكون علاقة تامة.

3-6) طرق ايجاد معامل الارتباط:

نجد معامل الارتباط بطريقة بيرسون

أ- الطريقة المبسطة:

لايجاد معامل الارتباط نتبع الخطوات التالية:

- نجد $\sum$ س، $\sum$ ص
- نجد $\sum$ س^2 أي مربع كل مشاهدة من س ثم المجموع.
- نجد $\sum$ ص^2 أي مربع كل مشاهدة في ص
- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sqrt{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}\right)}} \quad \ldots\ldots(1-6)$$

ونورد الامثلة التالية:

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين س، ص

						المجموع
س	1	2	3	4	5	15
ص	3	6	9	12	15	45

جدول (6–1)

المطلوب: ايجاد معامل الارتباط

الحل: نشكل الجدول التالي والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3		27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (6–2)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر

$$ر = \frac{\frac{45\times 15}{5} - 165}{\sqrt{\left(\frac{45\times 45}{5} - 495\right)\left(\frac{15\times 15}{5} - 55\right)}} = \frac{135 - 165}{\sqrt{(405 - 495)(45 - 55)}}$$

$$1 = \frac{30}{30} = \frac{30}{\sqrt{900}} = \frac{30}{\sqrt{90\times 10}}$$

ر=1 أي ان الارتباط ارتباط ايجابي تام

مثال : البيانات التالية تمثل قيم س، ص مرتبة في الجدول (6-3)

						المجموع
س	3	7	4	5	7	26
ص	2	6	8	6	8	30

جدول (6-3)

المطلوب ايجاد معامل الاتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (6-4) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (6-4)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر من العلاقة

$$ر = \frac{166 - \frac{30 \times 26}{5}}{\sqrt{\left(\frac{30 \times 30}{5} - 204\right)\left(\frac{26 \times 26}{5} - 148\right)}} = \frac{156 - 166}{\sqrt{(180 - 204)(135.2 - 148)}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{24 \times 12.8}} = \frac{10}{\sqrt{307.2}} = \frac{10}{17.53} = 0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين س، ص ايجابي (طردي) متوسط

مثال: البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين س ، ص كما في الجدول (6–5) .

						المجموع
س	4	7	9	12	15	47
ص	11	9	5	4	2	31

جدول (6–5)

المطلوب ايجاد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص

الحل: نشكل الجدول (6–6) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (6–6)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$ر = \frac{\frac{31 \times 47}{5} - 230}{\sqrt{\left(\frac{31 \times 31}{5} - 247\right)\left(\frac{47 \times 47}{5} - 515\right)}} = \frac{291.4 - 230}{\sqrt{(192.2 - 247)(441.8 - 515)}}$$

$$= \frac{61.4 -}{\sqrt{54.8 \times 73.2}} - \frac{61.4 -}{\sqrt{4011.36}}$$

$$= \frac{61.4 -}{63.34} = -0.97$$ وهذا ارتباط سلبي قوي

6-3-2) ايجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لذا نتبع الخطوات التالية

- نجد $\sum($س$_ر -\bar{س})($ص$_ر - \bar{ص})$

- نجد ع س ثم ع ص او قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$ر = \frac{1}{ن} \frac{\sum_{1}^{ن}(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{ع_س . ع_ص} \quad ....(6-2)$$

مثال: من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص}) = 47$ ، $ع_س = 16$ ، $ع_ص = 5$ حيث ن=5.

الحل: نطبق العلاقة $ر = \frac{1}{5} . \frac{47}{5 \times 16} = \frac{47}{400}$

$\therefore$ ر= 0.12 وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

6-3-3) معامل ارتباط سبيرمان للرتب:

كثيرا ما يستعمل هـذا المعـامل في البيانـات الوصفيـة الـتي يسـتحيل عندهـا اسـتخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانـات الرقميـة لتسـهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل.

ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد تراتيب البيانات المعطاة سواءً كانت وصفية او رقمية لكـل مـن المتغـيرين س، ص ونرمز لهما بالرموز سَ ، صَ .

- نجد ف = سَ − صَ . أي نجد الفرق بين التراتيب المناظرة.

- نأخذ مربع ف

- نطبق العلاقة التالية

$$ر = 1 - \frac{6 \sum ف^2}{ن\left(ن^2-1\right)} \qquad \text{.......................(3-6)}$$

مثال : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في احدى الشركات وكانت مرتبة كما في الجدول (6-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد

جدول (6-7)

الحل: نشكل الجدول (6-8) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	رَ	رَ	ف=سَ-صَ	ف²
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	2-	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	1.5	2.25
4	جيد جداً	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	2-	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	4.5-	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	1.5	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	2-	4.00
المجموع						60.50

جدول (6-8)

- ترتيب التقادير اعلاه كما ورد في سَ، صَ
- نجد ف = سَ-صَ
- نربع ف
- نجد مجموع التراابيع أي نجد $ف^2$.
- ثم نطبق العلاقة

$$ر = 1 - \frac{6\sum_{ر=1}^{ن} ف^2}{ن(ن^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 60.5}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{363}{990} = 1 - 0.37 = 0.63$$ وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه التراتيب ونأخذ متوسطها السابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في سَ. فمثلاً عند ترتيب قيم س لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1، 2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو $\frac{2+1}{2} = 1.5$ فيوضع في عمود سَ 1.5 اما التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم سَ وصَ لباقي التقادير.

مثال: البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء والرياضيات وهي كما في الجدول (6-9)

درجة الاحصاء س	85	75	90	95	80	88	90	60	75	87
درجة الرياضيات ص	80	85	75	75	80	72	85	65	70	83

جدول (6-9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (6-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء س	درجة الرياضيات ص	رتبة س=سَ	رتبة ص=صَ	ف=سَ-صَ	ف^2
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					998.5

جدول (6-4)

بعد ايجاد هذه البيانات نطبق التالية.

- ثم نطبق العلاقة

$$ر = 1 - \frac{6\sum_{ر=1}^{ن} ف_ر^2}{ن(ن^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 98.5}{10(100-1)} = 1 - \frac{591}{990} = 1 - 0.6 = 0.4$$

∴ الارتباط ضعيف بين المتغيرين س،ص وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للرتب.

الانحدار

6-4) مفهوم الانحدار:

هو ايجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س،ص تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية ل ص. او س حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة الرياضية خطية بصورتين.

7-2 أ. اذا كان الانحدار من ص على س فان المعادلة هي

$$ص = أس + ب \qquad ....(6-4)$$

المطلوب هو التعرف على قيم أ، ب لصياغة المعادلة ونسمي أ: هو معامل الانحدار او ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية ث= هو نقطة تقاطع الانحدار مع المحور الرأسي ويمكن ايجاد قيم أ. ب من العلاقة.

$$أ = \frac{\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \sum_{ر=1}^{ن} س_ر . \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \dfrac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}} \qquad ....(6-5)$$

ولايجاد ب نجد ها من العلاقة

$$ب = \bar{ص} - أ\bar{س}$$

حيث سَ، صَ هو المتوسط الحسابي للظاهرة س، الظاهرة ص.

ب- ولايجاد معادلة انحدار س على ص فاننا نكون المعادلة التالية :

$$س = أَص + بَ \qquad ....(6-6)$$

ولايجاد قيم أ، ب من العلاقة من ن العلاقة

$$أ' = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \sum_{ر=1}^{ن} س_ر . \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}} \quad ....(7-6)$$

ولايجاد $ب' = \bar{س} - أ\bar{ص}$ ....(8-6)

3-7 ولايجاد العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط فاننا نجدها كما يلي:

$ر^2 = أ \times أ'$. أو $ر = \sqrt{أ \times أ'}$ ....(9-6)

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد الامثلة التالية:

مثال: البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما مرتبة في الجدول (6-11)

اجور اسبوعية س	20	15	18	20	25
نفقات اسبوعية ص	15	14	18	15	20

جدول (6-11)

والمطلوب ايجاد .

أ- معامل ارتباط بيرسون

ب- معادلة انحدار ص/س أي انحدار ص على س باستخدام القانون العام والمربعات .

جـ- معادلة انحدار س/ص نجد س على ض.

د - معامل الارتباط من معامل انحدار ص على س ، س على ص ثم قارن نتيجة د مع نتيجة أ

هـ) اوجد معادلة انحدار ص على س من الدرجة الثانية

و) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار.

الحل: نكون الجدول (6–12) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

اجور اسبوعية	نفقات المبوبة ص	س ص	$س^2$	$ص^2$	$س^2 ص$	$س^3$	$س^4$
20	15	300	400	225	6000	8000	160000
15	14	210	225	16	3150	3375	50625
18	18	324	324	324	5832	5832	104976
20	15	300	400	225	6000	8000	16000
25	20	500	625	400	12500	15625	30625
المجموع 98	82	1634	1974	1370	33482	40832	866226

جدول (6–12)

أ- نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة

$$ر = \frac{\dfrac{\dfrac{82 \times 98}{5} - 1634}{\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}}}{\sqrt{\left(\dfrac{82 \times 82}{5} - 1370\right)\left(\dfrac{98 \times 98}{5} - 1974\right)}}$$

$$ر = \frac{1607.2 - 1634}{\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}}$$

$$ر = \frac{26.8}{\sqrt{25.2 \times 53.2}} = \frac{26.8}{\sqrt{1340.64}} = \frac{26.8}{36.61}$$

= 0.73 وهذا معامل ارتباط قوي نوعاما.

ب- ولايجاد معادلة انحدار ص على س نجد

$$أ = \frac{1634 - \frac{98 \times 98}{5}}{1974 - \frac{98 \times 98}{5}}$$

$$= \frac{1634 - 1607}{1974 - 1920.8} = \frac{26.8}{53.2} = 0.5$$

∴ أ = 0.5

ولايجاد ب نجد

$\bar{س}$= 19.6 ، $\bar{ص}$= 16.4

نجد قيمة س من العلاقة

ب = $\bar{ص}$ - أ $\bar{س}$

= 0.5×19.6−16.4 = 9.80−16.4 = −6.6

∴ معادلة انحدار ص/س

ص = 0.5 س+(−6.6) = 0.5 س − 6.6

جـ- ولايجاد معادلة انحدار س على ص نجد اولاً

$$أ´ = \frac{1634 - \frac{82 \times 98}{5}}{1370 - \frac{82 \times 82}{5}} = \frac{1634 - 1607.2}{1370 - 1344.8} = \frac{26.8}{25.2} = 1.06$$

∴ أ´ = 1.06

ب = $\bar{ص}$ - أ´ $\bar{س}$

= 16.4−1.06×19.6 = 16.40−20.78 = 4.38.

∴ المعادلة المطلوبة تكون

س= 1.06ص+(-4.38)

س= 1.06ص-4.38

د- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$ر^2$=أ×أ َ واصبح لدينا معلوماً كل من أ، أ َ

$ر^2$ =0.5×1.06

فيكون معامل الارتباط ر= $\sqrt{0.53}$

ر = 0.73

نلاحظ ان الجواب الذي حصلنا عليه بطريقة بيرسون هو نفس الجواب الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة.

و) نستطيع التنبؤ عن الجواب من العلاقة

ص= 0.5س-6.6 ونعوض عن س بالقيم المعطاة

ص=0.5س-6.6 =20-6.6 =13.4 دينار وهو المطلوب

هل الجزء الثاني من ب

ايجاد معادلة انحدار ص على س باستخدام المربعات الصغرى

الصورة العامة لمعادلة انحدار ص على س ص= م س + هـ

$\sum$ص=م .$\sum$س+ن هـ بأخذ المجموع لجميع الأطراف

82-98 م + 5 جـ

س ص = م $س^2$ + و س نضرب جميع أطراف المعادلة الأصلية في س

$\sum$س ص= م$\sum$ $س^2$ + جـ$\sum$س

1634=1974م+98جـ

82=98م+5جـ

8170=9870 م+490جـ

± 8036=±9604م ±490جـ بالطرح

134=266م

م= $\frac{134}{266}$ =0.5

وبالتعويض عن م في أي من المعادلات ولتكن معادلة (1)

82=8×0.5+5جـ

5جـ=82−49

5جـ = 33 ⇐ = $\frac{33}{5}$ =6.6

∴ معادلة انحدار ص على س هي

ص=0.5س+6.6

هـ) اما لايجاد معادلة خط انحدار ص على س من الدرجة الثانية

نضع المعادلة الأصلية ص= أ$س^2$+س+جـ ثم يأخذ المجموع لجميع الاطراف

$\sum$ص=أ $\sum$$س^2$+ب$\sum$س+5جـ......(1) ثم بضرب المعادلة الاصلية في س وأخذ المجموع

$\sum$س ص=أ $\sum$$س^3$+ب$\sum$ $س^3$+جـ$\sum$س.

1634=40832أ+1974ب+98جـ....(2)ثم بضرب المعادلة الاصلية في س^2 والمجموع

$\sum$ س^{2}ص= أ $\sum$ س^4+ب $\sum$ س^3+جـ$\sum$ س^2

33482=86622أ+ب $\sum$ س^3+جـ $\sum$ س^3....(3)

وبحل المعادلات اعلاه ينتج قيم أ، ب، جـ وبتعويضها في المعادلة الاصلية.

6-5) أمثلة اضافية

مثال: الجدول (6-13) يمثل معدل درجات خمسة طلاب في المرحلة الثانوية ومعدلاتهم في السنة الاولى في الكلية

معدل الثانوية س	85	72	64	82	65
معدل الثانوية ص	91	81	73	71	67

جدول (6-13)

والمطلوب

1- يرسم لوحة الانتشار للمتغيرين س، ص

2- ايجاد معامل الارتباط بطريقتين

3- اختبار هـ: أ= صفر على مستوي الدلالة α =0.5 مقابل هـ: أ≠صفر

4- اوجد معادلة خط انحدار ص على س كذلك معادلة انحدار س على ص.

5- اوجد معامل الارتباط من العلاقة التي تربط الارتباط بالانحدرا.

6- قدر معدل احد الطلاب في الثانوية العامة اذا كان معدله في السنة الاولى 88.

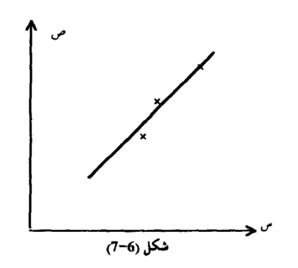
7- قدر معدل طالب في السنة الاولى اذا كان معدله في الثانوية العامة 76.

الحل: نكون جدول الحل (6-14).

س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$	رتبة س	رتبة ص	ف	$ف^2$	
85	91	7735	7225	8281	1	1	0	0	72
72	81	5832	5184	6561	3	2	1	1	$\bar{س} = \frac{368}{5} = 73.6$
64	73	4672	4096	532	5	3	2	4	$\bar{ص} = \frac{383}{5} = 76.6$
82	71	5822	6724	5041	2	4	2−	4	
65	67	4355	4225	4489	4	5	1−	1	
368	383	28416	27454	2701				8	

جدول (6–14)

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار



شكل (6–7)

والخط المبين يمر باغلب النقط

(2)أ– معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sqrt{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{383 \times 368}{5} - 28416}{\sqrt{\left(\frac{383 \times 383}{5} - 29701\right)\left(\frac{368 \times 368}{5} - 27454\right)}} = \frac{28188.8 - 28416}{\sqrt{(29337.8 -)(27084.8 - 27454)}}$$

$$= \frac{227.2}{\sqrt{363.2 \times 369.2}} = \frac{227.2}{366.1} = 0.62$$

ب- نجد معامل ارتباط سبيرمان كطريقة اخرى.

$$ر = 1 - \frac{6 \sum_{ر=1}^{ن} ف_ر^2}{ن(ن^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 8}{5 \times 24} = \frac{48}{120} = 1 - 0.4 = 0.6$$

4) ان معادلة خط انحدار ص على س هي

ص= أس+ب.

واذا تم تحديد كل من أ، ب يتم ايجاد المعادلة المطلوبة . وليتم ذلك نجد أ من العلاقة

$$أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sqrt{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)}} = \frac{227.2}{369.2} = 0.62$$

نجد ب من العلاقة ب= $\bar{ص}$ -أ $\bar{س}$ =

-76.6-0.62×73.6=76.6-45.6=31

المعادلة المطلوبة هي ص= 0.62س+31

س= أَص+بَ وبايجاد الثوابت أَ، بَ نصل الى المعادلة المطلوبة نجد أَ من العلاقة التالية

$$أَ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}\right)} = \frac{227.2}{363.3} = 0.63$$

نجد من العلاقة بَ = $\overline{س}$ - أَ $\overline{ص}$ =73.6-76.6×=73.6-48.3=25.3

ونكون المعادلة المطلوبة س=0.63ص+25.3

5)لايجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$ر = \sqrt{أ \times أَ} = \sqrt{0.62 \times 0.63} = 0.621$$

(6) س = 25.3+88×0.63 = 25.36+55.44 = 80.74

(7)ص=0.62×76+31=78.12

6-6) معامل الاقتران

تعريف: هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين لها اوضاع مختلفة لا تتعـدى حالتين وتكون الصورة العامة لها على النحو كما في جدول (6-15).

الظاهرة الثانية / الظاهرة الاولى	I	Π
أ	س11	س21
ب	س12	س22

جدول (6-15)

أو في جدول (6–16)

الظاهرة الثانية / الظاهرة الاولى	1	2
I	أ	ب
II	جـ	د

جدول (6–16)

ويكون معامل الاقتران $= \frac{س_{11} س_{22} - س_{12} \times س_{21}}{س_{11} س_{22} + س_{12} \times س_{21}} = \frac{أ د - ب ج}{أ د - ب ج}$ ......(6–10)

مثال: البيانات التالية تمثل وضع الانتاجية وعلاقتها مع وجود الحوافز في مؤسسة صناعية معينة مبينة بالجدول (6–17)

وجود الحوافز / وضع الانتاجية	موجود	غير موجود
تحسنت	16	9
لم تتحسن	2	10

جدول (6–17)

المطلوب: ايجاد معامل الاقتران بين المتغيرين بين وجود الحوافز ووضع الانتاجية

معامل الاقتران $= \frac{9 \times 2 - 10 \times 16}{9 \times 2 + 10 \times 16} = \frac{18 - 160}{18 + 160} = \frac{142}{178} = 0.978$

وهذا يؤكد وجود ارتباط قوي بين ظاهرة الحوافز والانتاجية

6-7) معامل التوافق

تعريف: هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين مختلفتين بحالات مختلفة تزيد عن اثنتين

ويمكن ايجاده من العلاقة التالية

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{X^2}{X^2 + ن}} \qquad \text{(11-6)}$$

نجد اولا X^2 وهنا ن تشير الى العدد الكلي لافراد الظاهرة قيد الدراسة

مثال: البيانات التالية تمثل توزيع الذكور والاناث على ثلاث كليات في جامعة ما مبينة بالجدول (6-18).

صنف الطلاب / الكليات	ذكور	اناث	المجموع
كلية العلوم الانسانية	1059 908	446 597	1505
كلية العلوم الطبيعية	283 179	119 223	402
كلية العلوم التطبيقية	860 1115	361 106	1221
المجموع	2202	926	3128

جدول (6-18)

القيمة المتوقعة

$$(س'_{11}) = \frac{1505 \times 2202}{3128} = 1059 \qquad س'_{21} = \frac{1505 \times 926}{3128} = 446$$

$$س'_{12} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 283 \qquad س'_{22} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 119$$

$$س'_{13} = \frac{1221 \times 2202}{3128} = 860 \qquad س'_{23} = \frac{1221 \times 926}{3128}$$

$$X^2 = \frac{(1059-908)^2}{1059} + \frac{(446-597)^2}{446} + \frac{(283-179)^2}{283} + \frac{(119-223)^2}{119} + \frac{(860-1115)^2}{860} + \frac{(361-106)^2}{361}$$

$$= 457.4991$$

معامل التوافق= $\sqrt{\frac{457.499}{3138+457.4991}} = 0.3572$

أي ان الارتباط بين ظاهرة اختيار الكلية وظاهرة الجنس من حيث الذكور والاناث هو ارتباط ضعيف.

مثال: البيانات التالية تمثل توزيع 270 مفردة بين الالوان والجنس مبينة بالجدول(6-19)

الجنس / الالوان	ذكر		انثى		المجموع
بني	80	67	40	53	120
وردي	30	44	50	36	80
أزرق	40	39	30	31	70
المجموع	150		120		270

جدول (6-19)

المطلوب: 1) ماهو نوع المتغيرين قيد الدراسة.

2) حساب معامل التوافق بين اللون والجنس.

الحل: تكون جدول الحل

1) نوع المتغير قيد الدراسة هي متغيرات تدل على الصفات (متغيرات وصفية)

(2) $\sqrt{\frac{X^2}{X^2+ن}}$

$\overline{س}_{11} = \frac{120 \times 150}{270} = 67$

$\overline{س}_{21} = \frac{120 \times 120}{270} = 53$

$\overline{س}_{12} = \frac{80 \times 150}{270} = 44$

$\overline{س}_{22} = \frac{80 \times 120}{270} = 36$

$\overline{س}_{13} = \frac{70 \times 120}{270} = 39$

$\overline{س}_{23} = \frac{70 \times 120}{270} = 31$

$$X^2 = \frac{(39-40)^2}{39} + \frac{(31-30)^2}{30} + \frac{(67-80)^2}{67} + \frac{(53-40)^2}{53} + \frac{(44-30)^2}{44} + \frac{(36-50)^2}{36}$$

$15.666 = 0.033 + 0.025 + 5.444 + 4.454 + 3.188 + 2.522$

معامل التوافق$= \sqrt{\frac{15.666}{270 + 15.666}} = \sqrt{\frac{15.666}{285.666}} = 0.234$

وهذا يعني ان الارتباط ضعيف.

تمارين عامة على الفصل السادس

1-البيانات التالية تمثل ارقام المشاهدات س، ص كما في الجدول التالي

س	2	5	7	10	12	13	15
ص	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب ايجاد نوع الاتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2- اوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي.

س	14	8	10	12	14	16
ص	12	8	7	5	3	1

3- من البيانات المرتبة بالجدول.

س	2	6	8	10	12	14
ص	1	2	3	4	5	6

والمطلوب 1) ايجاد معامل ارتباط بيرسون

2) ايجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب.

4- من البيانات المعطاة

$\sum$ س ص=85، $\sum$ س=20، $\sum$ ص=30، ن=5 $\sum$ س^2=165، $\sum$ ص^2=200

اوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5- من البيانات التالية اوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب اذا كانت مبينة كما يلي.

$\sum$ ف^2=55.5، ن= 6

س6: في مـايلي علامـات مجموعـة مؤلفـة مـــن 5 طـــلاب في امتحـــاني الرياضيـــات والاحصاء س، ص على التوالي.

س	86	68	74	80	62
ص	80	65	75	75	65

المطلوب

1) حساب معامل ارتباط بيرسون 2) معامل ارتباط سبيرمان.

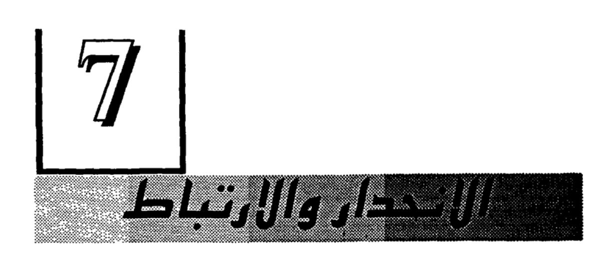
3) معادلة الانحدار ص=أ+ب س 4) اذا علم ان احد الطلبة قـد حصـل علامـة (78) في الريايات اوجد علامة الطالب في الاحصاء.

5) ايجاد قيمة الريايات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.

6) لرسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات

7) لرسم خط الانحدار

8) تفسير معاملي أ، ب.



6-1 نموذج الانحدار الخطي Linear Regression Model

النص الرياضي للمسألة:

أكتب برنامجاً لحساب ما يأتي:

1- مقدرات المربعات الصغرى least squares estimators (b, a) لمعاملات المجتمع α , β كما معطاة بالصيغ الرياضية التالية:

$$b = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 (\sum X)^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

2- الخطأ المعياري للتقدير (S) كما هو معطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$S = \sqrt{\frac{N-1}{N-2}\left(S_y^2 - b^2 S_x^2\right)}$$

حيث
$$S_x^2 = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)}}$$

و
$$S_y^2 = \sqrt{\frac{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}{N(N-1)}}$$

-3 فترة الثقة للمعامل في نموذج الانحدار الخطي $\mu_{y/x} = \alpha + \beta X$ بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$a - \frac{t_{\alpha/2} S \sqrt{\sum X_i^2}}{S_x \sqrt{N(N-1)}} < \alpha < a + \frac{t_{\alpha/2} S \sqrt{\sum X_i^2}}{S_x \sqrt{N(N-1)}}$$

حيث $t_{\alpha/2}$ هي قيمة دالة الاختبار (t) بدرجات حرية مقدارها

$\upsilon = N - 2$, $\sum X_i^2$ هو مجموع مربعات نقاط البيانات X، و S هو التقدير غير المنحاز unbiased estimator لـ (σ) وكما هو معطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$S^2 = \frac{N-1}{N-2}\left(S_y^2 - bS_x^2\right)$$

حيث N هو عدد ازواج نقاط البيانات في العينة.

-4 فترة الثقة للمعامل في نموذج الانحراف الخطي $\mu_{y/x} = \alpha + \beta x$ وهو كما معطى ألصيغة الرياضية التالية:

$$b - \frac{t_{\alpha/2} . S}{S_x \sqrt{(N-1)}} < \beta < b + \frac{t_{\alpha/2} . S}{S_x \sqrt{(N-1)}}$$

حيث b هو تقدير النقطة point estimator لـ (β)، و $(t_{\alpha/2})$ هو قيمة دالة

الاختبار t بدرجات حرية مقدارها v = N -2 ، و S_x هو الانحراف المعياري لنقاط البيانات X.

خوارزمية الحل:

-1 عين عدد (N) ازواج نقاط البيانات (Y, X) وتاكد من ان عدد الأزواج أكبر من 1.

-2 احسب حاصل جمع القيم X(X1) وحاصل جمع القيم Y(Y1)، وحاصل جمع مربعات القيم X(X2) وحاصل جمع مربعات القيم Y(Y2)، وحاصل الضرب التقاطعي cross product (P) لقيم X وY.

-3 احسب معاملات الانحدار الخطي b, a (A, B) وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.

-4 احسب الخطأ المعياري للتقدير (S) وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.

-5 احسب فترة الثقة للمعامل a كما يأتي:

(أ) عين القيمة المرغوبة لـ $t_{\alpha/2}$ (T2) ومستوى الثقة المناظر (A2).

(ب) احسب فترة الثقة للمعامل a بموجب الصيغة الرياضية المعطاة.

-6 احسب فترة الثقة للمعامل b بموجب الصيغة الرياضية المعطاة.

-7 توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM **THIS PROGRAM COMPUTES POINT AND INTERVAL ESTIMATES FOR **
020 REM ** THE LINEAR REGRESSION PARAMETERS A & B IN ADDITION TO THE**
030 REM ** STANDARD ERROR OF ESTIMATE**
040 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF Y AND X PAIRS AND INSURE**
050 REM ** THAT IT IS GREATER THAN 1**
```

```
060       INPUT N
070       IF N<2 THEN END
080 REM ** 2. ACCUMULATE ALL OF THE REQUIRED SUMS**
090       X1 = 0.0
100       Y1 = 0.0
110       X2 = 0.0
120       Y2 = 0.0
130       P = 0.0
140 REM ** ENTER ALL Y & X PAIRS AND ACCUMULATE THE VARIOUS SUMS**
150       FOR I = 1 TO N
160       INPUT X, Y
170       X1 = X1 + X
180       Y1 = Y1 + Y
190       X2 = X2 + (X * X)
200       Y2 = Y2 + (Y * Y)
210       P = P + (X * Y)
220       NEXT I
230 REM ** 3. COMPUTE THE POINT ESTIMATES OF A & B**
240       B = ((N * P) - (X1 * Y1))/((N * X2) - (X1 * X1))
250       A = (Y1/N) - (B * (X1/N))
260       A = INT (A * 1000 + 0.5)/1000
270       PRINT' THE PARAMETER A =': A
280 REM ** 4. COMPUTE THE STANDARD ERROR OF ESTIMATE (S)**
290 REM ** COMPUTE THE VARIANCE OF X VALUES(X3) AND OF Y VALUES (Y3)**
300       X3 = ((N * X2) - (X1 * X1))/(N*(N-1))
310       Y3 = ((N * Y2) - (Y1 * Y1))/(N * (N - 1))
320 REM ** COMPUTE THE STANDARD ERROR OF ESTIMATE (S)**
330       S = SOR (((N - 1.0)/(N - 2)) * (Y - ((B * B) *X 3)))
340 REM ** 5. COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL FOR THE PARAMETER A**
350 REM ** 5(A): ENTER THE CONFIDENCE LEVEL(A2)& THE VALUE OF T (T2)**
340       INPUT T2, A2
```

```
350 REM*5 (B): COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL**
360       D = (T2 * S * SQR (X2))/(SQR(X3) *SQR (N*(N-1.0)))
370       L=A-D
380       H=A+D
390       L = INT (L * 1000 + 0.5)/1000
400       H = INT (H * 1000 + 0.5)/1000
410       PRINT" THE CONFIDENCE INTERVAL FOR A IS": L;" ...";H
420       PRINT WITH": A2;% CONFIDENCE"
430 REM ** 6. COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B**
440       D = (T2 * S)/(SQR (X3) * SQR (N - 1.0))
450       L=B-D
460       H=B+D
470       L INT (L * 1000 + 0.5)/1000
480       H = INT (H * 1000 + 0.5)/1000
490       B = INT (B * 1000 + 0.5)/1000
500       PRINT THE PARAMETER B =";B
510       PRINT THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B IS";L;"...";H
520       PRINT WITH": A2;"% CONFIDENCE"
530       S = INT (S * 1000 + 0.5)/1000
540       PRINT "THE STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE IS";S
550 REM ** 7.END THE PROGRAM**
560       END
```

مثال: اذا كانت لديك نقاط البيانات المبينة ادناه:

11	10	9	8	7	6	5	X
5	3	2	4	1	3	1	Y

احسب:

(أ) التقدير النقطي b, a لنموذج الانحدار الخطي $Y = a + bX$

(ب) الخطأ المعياري للتقدير.

(جـ) فترة 95% ثقة لـ α , β.

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

7
1, 5
3, 6
1, 7
4, 8
2, 9
3, 10
5, 11

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PARAMETER A = - 0.999

THE CONFIDENCE INTERVAL FOR A IS - 5.87 ... 3.873

WITH 95% CONFIDENCE

THE PARAMETER B = 0.464

THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B IS - 0.126 ... 1.055

WITH 95% CONFIDENCE

THE STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE IS 1.216



النص الرياضي المسألة:

اكتب برنامجاً لحساب التقديرات النقطية (d, c) point estimators للنموذج الاسي $Y = cd^x$. واذا اخذنا اللوغاريتم لطرفي الصيغة الرياضية المبينة، فسوف نحصل على:

$$\text{Log } Y = \text{Log } cd^x$$

ويمكن اعادة كتابة الصيغة الرياضية اعلاه كما يلي:

$$\text{Log } Y = \text{Log } c + X \text{ Log } d$$

لاحظ التشابه هنا بين الصيغة الرياضية المبينة اعلاه وبين الصيغة العامة النموذج الخطي المعطاة بالصيغة الرياضية التالية:

$$Y = a + bX$$

افرض ان $A = \log c$ ، $B = \log d$ ، $Y = \log y$. فاذا عوضنا عن هذه القيم في الصيغ الرياضية العامة للتقديرات الخطية فسوف نحصل على:

$$b = \frac{N\sum X \log Y \sum X \sum \log Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \overline{\log Y} - b\bar{X}$$

وحالما نحصل على قيمة b, a ، فإن الصيغ الرياضية التالية يمكن استخدامها لحساب d, c:

$$a = \log c$$
$$b = \log d$$

خوارزمية الحل:

1- عين عدد ازواج (N) نقاط البيانات X, Y وتأكد من ان هذا العدد اكبر من 1 .

2- احسب حاصل جمع (X1) القيم X، حاصل جمع (X2) مربعات القيم X، حاصل جمع (L1) لوغاريتمات القيم Y، وحاصل جمع حاصل الضرب التقاطعي لقيم X لوغاريتمات القيم L2) Y).

3- احسب المعلمتين b, a وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.

4- احسب تقدير معلمتي الانحدار الاسي d, c وذلك بأخذ لوغاريتم القيم b, a على الترتيب.

5- اطبع النتائج.

6- توقف وأنه البرنامج

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM ESTIMATES THE EXPONENTIAL REGRESSION
020 REM ** PARAMETERS C & D**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF PAIRS OF Y & X**
040       INPUT N
050       IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. ACCUMULATE THE REQUIRED SUMS**
070       X1 = 0.0
080       Y1 = 0.0
090       L1 = 0.0
100       L2 = 0.0
110 REM ** ENTER THE DATA PAIRS (Y, X)**
120       FOR K = 1 TO N
130       INPUT Y, X
140       X1 = X1 + X
150       X2 = X2 + (X * X)
160       L1 = L1 + (LOG (Y)/LOG(10)))
170       L2=L2+(X*LOG(Y)/LOG(10)))
175       NEXT K
180 REM ** 3. COMPUTE A & B**
```

```
190        B = ((N * L2) - (X1 * L1)/((N * X2) - (X1 * X1))
200        A = (L1/N) - (E * (X1/N))
210 REM ** 4. COMPUTE C & D**
220        C = 10 ** A
230        D = 10 ** B
240        C = INT (C * 1000 + 0.5)/1000
250        D = INT (D * 1000 + 0.5)/1000
260 REM ** 5. PRINT THE RESULTS**
270        PRINT' THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER C IS':C
280        PRINT' THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER D IS': D
290 REM ** END THE PROGRAM**
300        END
```

مثال: بلغ عدد الطلبة المسجلين في احدى الكليات على مدى خمس سنوات كما يلي:

X(السنة)	1	2	3	4	5
Y(عدد الطلبة)	280	360	452	571	725

استخدم طريقة المربعات الصغرى لمطابقة منحنى معرف بالمعادلة التالية:

$\mu/x = cd^x$.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

```
5
280, 1
360, 2
452, 3
571, 4
725, 5
```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

```
THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER C IS 222.386
THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER  D IS 1.267
```

6-3 معامل بيرسون العزومي للارتباط
Pearson's Moment Correlation Coefficient

النص الرياضي للمسالة:

اذا كانت لديك مجموعة من المتغيرات X و Y، فاكتب برنامجاً لقياس الارتباط الخطي بين المتغيرات X و Y. وتسمى هذه القيمة "معامل الارتباط correlation coefficient" ويرمز لها بالحرف (r). ويمكن حساب هذا المعامل باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left(N\sum X^2 - (\sum X)^2\right).\left(N\sum Y^2 - (\sum Y)^2\right)}}$$

خوارزمية الحل:

1- عين عدد ازواج (N) نقاط البيانات (X, Y) وتاكد من ان هذا العدد يساوي 2 أو اكبر.

2- قم باجراء ما ياتي لكافة ازواج نقاط البيانات (X, Y):

(أ) احسب مجموع (X1) مكونات العنصر X.

(ب) احسب مجموع (X2) مربعات العنصر X.

(جـ) احسب مجموع (Y1) مكونات العنصر Y .

(د) احسب مجموع (Y2) مربعات العنصر Y .

(هـ) احسب مجموع (P) حاصل ضرب X في Y .

3- احسب بسط (N1) من الصيغة الرياضية.

4- احسب مقام (D1) من الصيغة الرياضية.

5- احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط (R) وذلك بقسمة البسط (N1) من الخطوة 3 على المقام (D1) من الخطوة 4 .

6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة.

8- توقف وانه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE PEARSON PRODUCT MOMENT**
020 REM ** CORRELATION COEFFICIENT**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF DATA PAIRS (X, Y)**
040       INPUT N
050       IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. COMPUTE THE VARIOUS SUMS INDICATED IN THE ALGORITHM**
070       X1 = 0.0
080       X2 = 0.0
090       Y1 = 0.0
100       Y2 = 0.0
110       P = 0.0
120       FOR I = 1 TO N
130       INPUT X, Y
140       X1 = X1 + X
150       X2 = X2 + (X * X)
160       Y1 = Y1 + Y
170       Y2 = Y2 + (Y * Y)
180       P= P + (X * Y)
190       NEXT I
200 REM ** 3. COMPUTE THE NUMERATOR (N1) OF THE FORMULA**
210       N1 = (N * P)-(X1 ** Y1)
220 REM ** 4. COMPUTE THE DENOMINATOR (D1) OF THE FORMULA**
230       D1 = SQR (((N * X2 (X1 ** 2.0)) * (N * Y2 - (Y1 ** 2.0))))
240 REM ** 5. COMPUTE THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEF.(R)**
250       R = N1/D1
260 REM**6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST 3RD DECIMAL**
270       R = INT (R * 1000 + 0: 5)/1000
280 REM ** 7. PRINT THE RESULT**
290       PRINT'THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFF IS': R
300 REM ** 8. END THE PROGRAM**
310       END
```

مثال · يبين الجدول التالي عدد القطع التالفة ومجموع عدد القطع التي قام بانتاجها سبعة عمال في احد مصانع السيارات:

عدد القطع التالفة	36	25	12	17	24	29	9
العدد الكلي للقطع المنتجة	118	111	136	162	98	154	101

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المبينة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

7
36, 118
25. 111
12, 136
17, 162
24, 98
29, 154
9, 101

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICIENT IS 0.019

مثال : بلغ عدد الساعات الاسبوعية التي درستها مجموعة من الطلبة في احد المساقات اضافة الى العلامات التي حصلوا عليها في الامتحان النهائي كما مبين في الجدول التالي:

عدد الساعات/اسبوع	10	5	13	20	14	9
العلامة النهائية	85	70	76	81	68	95

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المبينة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6
10, 85
5, 70
13, 76
20, 81
14, 68
9, 95

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFIC "NT IS -0.022



4-6 معامل سبيرمان لارتباط الرتب Spearman's Rank Correlation Coefficient

النص الرياضي للمسألة:

اذا كان لديك مجموعة مكونة من (N) من القيم المرتبة $X_1, X_2, ..., X_N$ ومجموعة اخرى مكونة من (N) من القيم المرتبة $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ فاكتب برنامجاً لحساب معامل سبيرمان لارتباط الرتب (p) بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N} di^2}{N(N^2 - 1)}$$

حيث $\sum di^2$ هو مجموع مربعات الفروق لازواج من المشاهدات عددها (N).

خوارزمية الحل:

1- عين عدد ازواج (N) الرتب المطلوب استخدامها لاجراء الاختبار وتأكد من أن هذا العدد يساوي 2 أو أكبر.

2- احسب مجموع مربعات الفروق (S) للرتب لكافة ازواج نقاط البيانات.

3- احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب.

4- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

5- اطبع النتيجة.

6- توقف وأنه البرنامج

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SPEARMAN RANK CORRELATION**
020 REM ** COEFFICIENT**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF PAIRS OF RANKS (X, Y)**
040        INPUT N
050        IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. COMPUTE THE SUM OF SOUARED DIFFERENCES IN RANK (S)**
070        S = 0.0
080        FOR I = 1 TO N
090        INPUT X, Y
100        S = S + ((X - Y)**2)
110        NEXT I
120 REM ** 3. COMPUTE THE SPEARMAN RANK CORR. COEFF. (R)**
130        R = 1.0 - ((6.0 * S)/N*(N * N) -1)))
140 REM ** ROUND THE RESULT TO THE NEAREST 3RD DECIMAL PLACES**
150        R = INT (R * 1000 + 0.5)/1000
160 REM ** 5. PRINT THE RESULT**
170        PRINT' THE SPEARMAN RANK CORRELATION COEFFICIENT IS':R
180 REM ** 6. END THE PROGRAM**
190        END
```

مثال احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب للبيانات التالية:

8	6	7	4	3	1	X
7	4	8	1	5	2	Y

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6
1, 2
3, 5
4, 1
7, 8
6, 4
8, 7

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE SPEARMAN RAND CORRELATION COEFFICIENT IS 0.429

مثال : احسب معامل سبيرمان للارتباط بالرتب بين المعدلات الآتية لعشرة طلاب في امتحان الفصل الثاني والامتحان النهائي:

(X) معدل الطالبة في امتحان الفصل الثاني	73 91 87 55 60 77 90 65 82 75
(Y) معدل الطالب في الامتحان النهائي	71 89 88 57 50 80 90 55 85 69

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

10
75, 69
82, 85
65, 55
90, 90
77, 80
60, 50
55, 57
87, 88
91, 89
73, 71

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE SPEARMAN RAND CORRELATION COEFFICIENT 1S 0.94

5-6 اختبار دلالة معامل بيرسون العزومي للارتباط

النص الرياضي للمسألة:

أكتب برنامجاً لما يأتي:

(أ) حساب معامل بيرسون العزومي للارتباط.

(ب) لاختبار ما اذا كان معامل الارتباط يختلف عن القيمة الصفرية أو عن أية قيمة غير صفرية معينة. فاذا كان المطلوب اختبار ($\rho \neq 0$) مقابل الفرضية البديلة ($\rho = 0$) ، فان هذه الدالة هي من نوع دالة الاختبار t ، وهي التي يمكن حسابها بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

حيث r تمثل معامل الارتباط للعينة، n تمثل عدد ازواج نقاط البيانات للعينة التي لها درجات حرية تساوي (n-2). اما اذا كانت الفرضية المبدئية ($\rho = \rho_0$) ، فان الاحصاء:

$$z = \frac{Z - m_z}{\sigma_z}$$

يلائم توزيعاً طبيعياً تقريبياً له:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

$$m_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

حيث z تمثل المتغير العشوائي المعياري، Z تمثل احصاء فيشر في نوع Z، r تمثل معامل الارتباط للعينة، ρ تمثل معامل الارتباط المجتمع، n تمثل عدد ازواج نقاط البيانات، m_z و σ_z الانحراف المتوسط والانحراف المعياري على الترتيب.

خوارزمية الحل:

1- احسب معامل الارتباط (R) بنفس طريقة حساب معامل ارتباط بيرسون.

2- عين القيمة (R2) المطلوب مقارنة معامل الارتباط المحسوب (R) بها .

3- اذا كانت (R2) لا تساوي 0.0 فاذهب الى الخطوة 5، والا فاستمر بتنفيذ الخطوات اللاحقة.

4- عين ما اذ
ا كان معامل الارتباط (R) يختلف عن قيمة 0.0. احسب قيمة $T = R/\sqrt{(1-R^2)/(N-2)}$ ، حيث N عدد ازواج البيانات في العينة، ثم اطبع قيمة T حيث تنتهي المهمة عند هذا الحد.

5- احسب $z = (Z-m_z)/\sigma_z$ ثم اطبع z.

6- توقف وانه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM TESTS THE SIGNIFICANCE OF A PEARSON**
020 REM ** PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICIENT**
030 REM ** 1. COMPUTE THE CORRELATION COEFFICIENT (R)**
040     INPUT N
050     IF N < 2 THEN END
060     X1 = 0.0
070     Y1 = 0.0
080     X2 = 0.0
090     Y2 = 0.0
100     P2 = 0.0
```

```
110        FOR I = 1 TO N
120        INPUT X, Y
130        X1 = X1 + X
140        Y1 = Y1 + Y
150        X2 = X2 + (X * X)
160        Y2 = Y2 + (Y * Y)
170        P2 = P2 + (X * Y)
180        NEXT I
190        N2 = (N * P2) - (X1 * Y1)
200        D2 = SQR (((N * X2 - (X1 ** 2.0))*(N * Y2 - (Y1 **2.0))))
210        R = N2/D2
220 REM ** ROUND THE RESULT TO THE NEAREST 3RD DECIMAL PLACES*
230        R = INT (R * 1000 + 0.5)/1000
240        PRINT 'THE CORRELATION COEFFICIENT IS': R
250 REM ** 2. ENTER THE VALUE (R2) TO COMPARE (R) TO IT**
260        INPUT R2
270        PRINT 'THE VALUE OF RHO IS':R2
280 REM ** 3. CHECK R2 AND MAKE THE DECISION**
290        IF R2 <> 0.0 THEN GOTO 380
300 REM ** 4.THIS ROUTINE DETERMINES WHETHER(R)IS DIFFERENT FROM 0.0**
310 REM ** COMPUTE THE VALUE OF (T)**
320        T = R/SQR (((1.0 - (R * R))/(N - 2)))
330        T = INT (T * 1000 + 0.5)/1000
340        PRINT 'THE VALUE OF T IS': T
350        END
360 REM ** 5. THE FOLLOWING ROUTING DETERMINES WHETHER (R) IS**
370 REM ** DIFFERENT THAN SOME NONZERO VALUE**
380        C = LOG ((1.0 + R)/(1.0 -- R))/2.0
390        M1 = LOG ((1.0 + R2)/(1.0 - R2))/2.0
400        S2 = 1.0/SQR (N-3.0)
410 REM ** COMPUTE THE VALUE OF (Z)**
420        Z = (C - M1)/S2
430        Z = INT (Z * 1000 + 0.5)/1000
440        PRINT 'THE VALUE OF Z IS': Z
450 REM ** 6. END THE PROGRAM**
460        END
```

مثال : بلغ عدد الساعات الاسبوعية التي درستها مجموعة من الطلاب لاحد المساقات وكذلك العلامات التي حصلوا عليها في الامتحان كما يلي:

عدد الساعات/اسبوع	10	5	13	20	14	9
العلامة النهائية	85	70	76	81	86	95

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المذكورة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6
10, 85
5, 70
13, 76
20, 81
14, 68
9, 95

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE CORRELATION COEFFICIENT IS 0.222

والان ادخل قيمة (R2) ولتكن 0.

0

وسوف يظهر الجواب التالي:

0
THE VALUE OF R2 IS 0
THE VALUE OF T IS-0.043

مثال يبين الجدول التالي القطع المنتجة التالفة ومجموع عدد القطع التي قام بانتاجها سبعة عمال في احد مصانع السيارات:

عدد القطع التالفة	36	25	12	17	24	29	9
مجموع القطع	118	111	136	162	98	154	101

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

7
36, 118
25, 111
12, 136
17, 162
24, 98
29, 154
9, 101

وسوف يظهر الجواب الاول كما يلي:

THE CORRELATION COFFICIENT IS 0.019

والان ادخل قيمة (R2) ولتكن 0 مثلاً:

0

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

0

THE VALUE OF R2 IS 0

THE VALUE OF T IS 0.042

تمارين:

1- احسب الانحدار الخطي للبيانات التالية:

12	13	15	19	20	17	12	14	X
27	25	22	27	34	26	20	24	Y

2- استخدم البيانات المبينة في المسالة (1) لحساب معامل الارتباط للبيانات المذكورة.

3- يبين الجدول التالي عدد العدسات التي باعتها شركة النظارات الوطنية خلال سبعة اعوام. احسب الانحدار الاسي ثم عين النمو المتوقع في مبيعات هذه الشركة للاعوام 8-12.

السنة	1	2	3	4	5	6	7
عدد العدسات المباعة	5000	6000	10000	17000	20,000	25000	30000

الفصـــل السابع

السلاسل الزمنية

7-1) مفهوم السلسة الزمنية

السلسلة الزمنية : مجموعة مشاهدات حول ظاهرة معينة أخذت بترتيب زمـني معـين عادة ما يكون هذا الترتيب فيه تساوي الفترات الزمنية مثل الساعات، الايام، الاشهر، او السنوات المتتابعة.

امثلة متنوعة على السلاسل الزمنية.

* المبيعات اليومية في مركز بيع الكتب لمدة شهر.
* قراءة درجات حرارة المريض في ساعة لمدة يوم واحد.
* قراءات الانتاج الشهري لمدة سنة في شركة الادوية العربية.
* الانتاج الشهري من البترول لدولة الكويت ولعدة سنوات.

كل هذه القراءات وتتابعها الزمني جميعها تمثل سلسلة زمنية.

7-2) تحليل السلسلة الزمنية من خلال ايجاد المتوسطات المتحركة.

في هذا البند يبرز سؤال وهو ما المقصود من تحليل السلسلة الزمنيــة؟ وللاجابـة نقـول بان المقصود من تحليل السلسة الزمنية هو.

1) معرفة التغيرات التي تطرأ على السلسـلة خـلال الفـترات المتسـاوية الـتي اخـذت عندها قراءة المشاهدات.

2) معرفة طبيعة العلاقة بـين الظـاهرة قيـد الدراسـة والظـواهـر الاخـرى ولعـل رسـم منحنى السلسلة يمكن ان يبرز جانب من هذه الفوائد لعملية تحليل السلسلة الزمنية.

3) معرفة ماضي الظاهرة وكيفية تغيرها.

4) التنبؤ بمستقبل الظاهرة قيد الدراسة مما تفيد لاتخاذ قرار معين وعند اجراء عملية التحليل للسلسلة اول عمل نقوم به رسم المنحنى البياني لقيم المشاهدات مع الزمن ونعين النقاط وبعد تعيين النقاط ورسم هذا المنحنى يبرز لنا اهمية استخدام المعدلات المتحركة حتى نحصل على خط املس لانها تظهر تعرجات كبيرة في المنحنى وهذه التعرجات تجعلنا طلق على السلسلة بانها خشنة ونستطيع قياس مدى الخشونة من خلال ايجاد معامل نسميه بمعامل الخشونة نجده من العلاقة التالية:

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - س_{ر-1})^2}{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2} \qquad (7-1)$$

وكلما كان هذا الرقم قليلاً كلما كانت السلسلة ملساء.

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي

مثال: احسب معامل الخشونة للسلسة التالية 7 ، 9، 14، 15، 20، 19

الحل: لحساب معامل الخشونة نكون جدول الحل (7-1).

ن	$س_ر$	$س_{ر-1}$	$س_ر-س_{ر-1}$	$(س_ر-س_{ر-1})^2$	$س_ر-\bar{س}$	$(س_ر-\bar{س})^2$
1	7	–	–	–	–	–
2	9	7	2	4	5-	25
3	14	9	5	25	0	0
4	15	14	1	1	1	1
5	20	15	5	25	6	36
6	19	20	1-	1	5	25
				56		87

جدول (7-1)

نجد المتوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{19+20+15+14+9+7}{6} = \frac{84}{6} = 14$

ثم نجد معامل الخشونة من العلاقة الرياضية التالية.

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{ر=2}^{ن}(س_ر - س_{ر-1})^2}{\sum_{ر=2}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2} = \frac{56}{87} = 0.64$$

ولجعل السلسلة ملساء هناك عدة طرق نذكر منها

7-3) طريقة المتوسطات المتحركة:

لايجاد المتوسطات المتحركة لابد من اتباع الخطوات التالية

(أ) في حالة ما اذا كان المتوسط فردياً أي ان ل= 3، 5، 7، ......، ل= طول المتوسط

* نحدد القراءة الاولى عندما كان الزمن صفراً ونرمز لها بالرمز ص. والقراءة الثانية $ص_1$ وهكذا تتكون السلسلة كما في جدول (7-2).

الزمن	0	1	2	3	......	ن-1
قيمة المشاهدة $ص_ر$	$ص_0$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$		$ص_{ن-1}$

جدول (7-2)

* نرمز لقيم المتوسطات المتحركة بالرمز $\bar{ص}_ر$

* نحدد موقع المتوسط المتحرك الاول من العلاقة التالية

$$\text{موقع المتوسط الاول} = \frac{\text{طول المتوسط}+1}{2} = \frac{ل+1}{2} \quad ....(7-2)$$

مثال: اذا كان طول المتوسط 3 لسلسة زمنية فان موقع المتوسط الاول= $\frac{3+1}{2} = 2$
أي انه يقابل المشاهدة الثانية في السلسلة.

مثال: اذا كان طول المتوسط 5 لسلسة زمنية فان موقع المتوسط الاول= $\frac{5+1}{2} = 3$
أي انه يقابل المشاهدة الثالثة في السلسلة. وهكذا

* بعد تحديد موقع المتوسط الاول نلجأ الى تعيين قيمة المتوسط نفسه وعلى سبيل المثال اذا كان لدينا الطول 3 وقيم المشاهدات ص$_0$ ، ص$_1$، ....، ص$_{ن-1}$ فان موقع المتوسط الاول ص$_1$= $\frac{3+1}{2} = 2$ أي مقابل المشاهدة الثانية.

وقيمة هذا المتوسط = $\frac{ص_0 + ص_1 + ص_2}{3}$ =

$$\frac{\text{المشاهدة السابقة للمتوسط + المشاهدة المقابلة للمتوسط + المشاهدة اللاحقة للمتوسط}}{3}$$

ثم نجد

$$\hat{ص}_2 = \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}$$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_2 + ص_3 + ص_4}{3}$$

وعند كتابة جدول يشمل قيم المشاهدات والمتوسطات المتحركة المقابلة لها كما في الجدول (7-3) .

الزمن ن	0	1	2	3	4	.....	ن-2	ن-1
المشاهدات ص$_ر$	ص$_0$	ص$_1$	ص$_2$	ص$_3$	ص$_4$	....	ص ن-2	ص$_{ن-1}$
المتوسطات المتحركة صَ		$\hat{ص}_1$	$\hat{ص}_2$	$\hat{ص}_3$	$\hat{ص}_4$	..	$\hat{ص}_{ن-1}$	–

جدول (7-3)

ملاحظات:

1) نلاحظ ان $ص_0$ لم يقابلها متوسط متحرك لانه لم يسبقها اية مشاهدة.

2) $ص_{ن-1}$ لم يقابلها متوسط متحرك وهكذا بالنسبة لباقي الاطوال الفردية

مثال: اوجد المتوسطات المتحركة بطول 3 للسلسلة الزمنية

7، 11، 8، 19، 25، 14، 20.

الحل: نرتب قيم المشاهدات في جدول زمني كما هو مبين ادناه في جدول (7-4).

	$ص_0$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$	$ص_6$
الزمن ن	0	1	2	3	4	5	6
المشاهدات $ص_ر$	7	11	8	19	25	14	20
المتوسطات $\hat{ص}_ر$		8.67	12.67	17.33	19.33	19.67	-

جدول (7-4)

نحدد موقع المتوسط المتحرك الاول= $\frac{1+3}{2}$ = 2 مقابل $ص_1$ =11

نجد:

$$\hat{ص}_1 = \frac{ص_0+ص_1+ص_2}{3} = \frac{8+11+7}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\hat{ص}_2 = \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3} = \frac{1+8+11}{3} = 12.67$$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_2+ص_3+ص_4}{3} = \frac{25+1+8}{3} = 17.33$$

$$\hat{ص}_4 = \frac{ص_3+ص_4+ص_5}{3} + \frac{14+25+19}{3} = 19.33$$

$$\hat{ص}_5 = \frac{ص_4+ص_5+ص_6}{3} = \frac{20+14+25}{3} = 19.67$$

مثال: اوجد المتوسطات المتحركة بطول 5 للسلسلة الزمنية

7، 13، 21، 23، 27، 19، 17.

الحل: نرتب البيانات التالية في الجدول (7−5).

الزمن $ن$	0	1	2	3	4	5	6
المشاهدات $ص_ر$	7	13	21	23	27	19	17
المتوسطات $ص_ر$	−	−	18.2	20.6	21.4	−	−

جدول (7−5)

نجد ترتيب المشاهدة المقابلة للمتوسط الاول= $\frac{1+5}{2} = 3$.

فيكون ترتيب المشاهدة الثالثة هي المقابلة لاول متوسط متحرك.

− نجد قيمة المتوسط المتحرك من العلاقة

$$\hat{ص}_2 = \frac{ص_0+ص_1+ص_2+ص_3+ص_4}{5}$$

$$\hat{ص}_2 = \frac{27+23+21+13+7}{5} = \frac{91}{5} = 18.2$$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_1+ص_2+ص_3+ص_4+ص_5}{5} = \frac{19+27+23+21+13}{5} = \frac{103}{5} = 20.6$$

$$\hat{ص}_4 = \frac{ص_2+ص_3+ص_4+ص_5+ص_6}{5} = \frac{17+19+27+23+21}{5} = \frac{107}{5} = 21.4$$

ب− اذا كان طول المتحرك زوجيا لذا نتبع الخطوات التالية

− نكون جدول نحدد فيه الزمن وقيم المشاهدات الاصلية

− لتحديد موقع المتوسط، الاول نكتب العلاقة التالية

موقع المتوسط المتحرك الاول= $\frac{ل+1}{2}$

فعندما يكون ل=4 فان موقع المتوسط الاول يكون = $\frac{4+1}{2} = 2.5$ أي ان المتوسط يقع بين المشاهدة الثانية والمشاهدة الثالثة والرابعة وهكذا.

وحتى يكون المتوسط المتحرك مقابل أي مشاهدة اصلية نلجأ للخطوة التالية.

- نجد متوسط متحرك مركزي بطول 2 فيكون هذا المتوسط مقابل للمشاهدة الثالثة. والرابعة وهكذا.

مثال: اوجد متوسط متحرك بطول 4 لقيم المشاهدات التالية

4، 9، 15، 8، 21، 24، 11، 12.

الحل: نجد ترتيب موقع المتوسط المتحرك الاول= $\frac{4+1}{2} = 2.5$

-نرتب البيانات ضمن الجدول (7-6).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
قيم المشاهدة	4	9	15	8	21	24	11	12
ص7								
ص8								

جدول (7-6)

$ص_{2.5} = \frac{4+9+15+8}{4} = 9$

$ص_{3.5} = \frac{9+15+8+21}{4} = \frac{53}{4} = 13.25$

$ص_{4.5} = \frac{15+8+21+24}{4} = \frac{68}{4} = 17$

$ص_{5.5} = \frac{8+21+24+11}{4} = \frac{64}{4} = 16$

$ص_{6.5} = \frac{21+24+11+12}{4} = \frac{68}{4} = 17$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_{2.5} + ص_{3.5}}{2} = \frac{9 + 13.25}{2} = 11.125$$

$$\hat{ص}_4 = \frac{ص_{3.5} + ص_{4.5}}{2} = \frac{13.25 + 17}{2} = 15.125$$

$$\hat{ص}_5 = \frac{ص_{4.5} + ص_{5.5}}{2} = \frac{17 + 16}{2} = 16.5$$

$$\hat{ص}_6 = \frac{ص_{5.5} + ص_{6.5}}{2} = \frac{16 + 17}{2} = 16.5$$

7-4) مركبات السلسلة الزمنية.

عندما نحصل على قيم المشاهدات للسلسلة الزمنية لا بد من دراسة المؤثرات التي قد تؤثر على هذه القراءات وماهذه المؤثرات الا ما نسميها بمركبات السلسلة الزمنية والتي ناتج حاصل ضربها معا يعطي قيم المشاهدة الاصلية ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية.

$$ص = ت \times ف \times د \times خ \qquad ....(7-3)$$

حيث ص: هي قيمة المشاهدة الاصلية.

ت: مركبة الاتجاه العام.

ف: المركبة الفصلية (الموسمية)

د: مركبة الدورة.

خ: مركبة الخطأ

وسنتناول كل مركبة من المركبات آنفة الذكر على حدى.

أ- مركبة الاتجاه العام.

تعريف: مركبة الاتجاه العام هي المركبة التي توضح مسيرة السلسلة بشكل عام وعلى مدى بعيد ويمكن استخراجها من خلال معادلة انحدار ص/س والمتمثل بالعلاقة.

$$ص = أس + ب \qquad ....(7-4)$$

ومن الملاحظ من العلاقة اعلاه ان قيمة ص مرتبطة بكل من أ، س بشكل رئيسي ولذا يحتمل تزايد ص او تناقصها او قد تحافظ على قيمتها ثابتة. كذلك هناك طرق اخرى لايجاد هذه المركبة منها طريقة الانتشار (التمهيد باليد)، طريقة المتوسطات المتحركة ، وكذلك طريقة نصف السلسلة المتحركة.

ونحن بصدد هذه المركبة لابد من اعطاء امثلة توضح الافكار التي وردت سابقا وحتى لايكون هناك لبس في الموضوع.

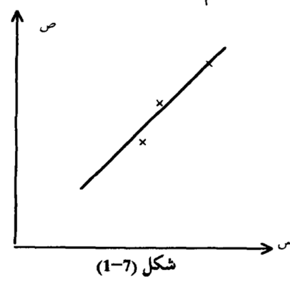
طريقة الانتشار (التمهيد باليد) :

مثال: البيانات التالية تمثل قيم مشاهدات في سلسلة زمنية لقراءات تمثل انتاج مصنع للأحذية خلال اسبوع معين كما في جدول (7-7).

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
مقدار الانتاج	120	140	130	145	115	125

جدول (7-7)

حيث مقدار الانتاج بالزوج. والمطلوب ايجاد مركبة الاتجاه العام عن طريق رسم انتشاري وايجاد معادلة الخط العام



شكل (7-1)

ولايجاد معادلة خط الاتجاه نأخذ نقطتين تقعان على الخط الممهد. ونرمز لهما بالرمز أ، ب ونكتب احداثي كل منهما مع ملاحظة اعطاء تسلسل عددي 1، 2، 3، ...،6 للأيام حتى يسهل ايجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي يمكن ايجادها من العلاقة الرياضية

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ص - 130}{س - 3} = \frac{145 - 130}{4 - 3}$$

$$ص - 130 = 15 \text{ (س} - 3)$$

$$ص - 130 \times 1 = 15س - 45.$$

أو $ص = 15س + 85$

وهذه الطريقة تختلف من شخص الى آخر مما يسبب لها عدم الدقة.

ب- طريقة المتوسطات المتحركة.

قد يحتاج الى تمهيد لخط السلسلة لكثرة التعرجات التي قد تظهر في السلسلة ولكي نجعل الخط املس نلجأ الى تمهيد هذا الخط عن طريق المتوسطات المتحركة. وقد سبق وان تناولنا المتوسطات المتحركة بشكل مفصل.

ج) طريقة المربعات الصغرى.

وهذه الطريقة اكثر دقة من سلفيها وهي ان نجد معادلة خط الانحدار العام ل ص/س

ص= أس+ب.

ثم نجد أ من العلاقة

$$أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س ص - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س \sum_{ر=1}^{ن} ص}{ن}}{\sum_{ر=1}^{ن} س^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س\right)^2}{ن}} \quad \text{......(7-5)}$$

ونجد ب من العلاقة: $ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$ ....(7-6)

مثال: البيانات التاليــة تمثـل قـراءات لدرجـة حـرارة مريـض خـلال سـت سـاعات مأخوذة القراءات كل ساعة كما في الجدول (7-8).

زمن القراءات	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	37	38	38.5	37.5	37	37

جدول (7-8)

الحل: نشكل جدول يحوي جميع البيانات المطلوبة للحل كما في جدول (7-9).

س	ص	س.ص	$س^2$	$ص^2$
1	37	37	1	1369.00
2	38	76	4	1444.00
3	38.5	115.5	9	1482.25
4	37.5	150	16	1406.25
5	37	185	25	1369
6	37	222	36	1369
21	225	785.5	91	8439.5

جدول (7-9)

ولايجاد أ نطبق العلاقة اعلاه:

$$أ = \frac{785.5 - \frac{225 \times 21}{6}}{91 - \frac{21 \times 21}{6}} = \frac{785.5 - 785.5}{91 - 73.5} = \frac{2-}{17.5} = -0.114$$

ثم نجد $ب = \overline{ص} - أ\overline{س}$ = 37.5−0.114×3.5 = 37.5−0.399 =37.101

∴ معادلة الاتجاه العام هي : ص = 0.114س+37.101

د- طريقة متوسط نصف السلسلة .

وهذه الطريقة اقل دقة من طريقة المربعات الصغرى الا انها اكثر دقة من المتوسطات المتحركة وطريقة الانتشار. وتتلخص بالخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لنصف السلسلة الثاني اذا كان عدد المشاهدات زوجي اما اذا كان عدد المشاهدات فردي فتهمل المشاهدة الوسطى ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الثاني وبهذا يتعين الاحداثي الصادي للنقطتين.

- لتحديد الاحداثي السيني نعطي قيم المشاهدات ترقيم متسلسل سواءً كانت المشاهدات قيما او غير ذلك ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الاول من القيم سواءً كان عددها زوجي ام فردي فيكون المتوسط هو الاحداثي السيني وكذلك للنصف الثاني المتوسط الحسابي يكون هو الاحداثي السيني وبذا تتعين النقطتين.

- نصل بين النقطتين بعد تعينهما على المستوى الاحداثي فيكون لدينا خط الاتجاه العام.

- نجد معادلة خط الاتجاه العام من العلاقة.

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال: اذا كان انتاج مصنع للألبسة الصوفية خلال عشرة سنوات مبينة بالجدول التالي حيث الانتاج بالآف القطع. وهي كما في الجدول (7-10)(.

السنة س	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	979
عدد القطع ص المنتجة	53	64	67	60	69	74	67	79	85	90

جدول (7-10)

والمطلوب ايجاد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسط نصف السلسلة.

الحل: نتبع الخطوات التالية

نكون جدول يشمل جميع المحتويات اللازمة للحل وهو كما في الجدول(7-11).

السنة س	السنة بالترقيم س	عدد القطع المنتجة ص	متوسط نصف س	متوسط نصف ص
1970	1	53		
1971	2	64		
1972	3	67	الأول = 3	الأول = 62.6
173	4	60		
1974	5	69		
1975	6	74		
1976	7	67	الثانى = 8	الثانى = 79
1977	8	79		
1978	9	85		
1979	10	90		

جدول (7–11)

نصف المتوسط الاول لـ ص = $\frac{69+60+67+64+53}{5} = 62.6 =$ ص$_1$

نصف المتوسط الاول لـ ص = $\frac{90+85+79+67+74}{5} = 79 =$ ص$_2$

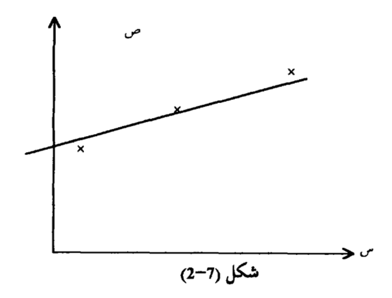
نصف المتوسط الاول لـ س= $\frac{5+4+3+2+1}{5} = \frac{15}{5} = 3 =$ س$_1$

نصف المتوسط الثاني لـ س= $\frac{10+9+8+7+6}{5} = \frac{40}{5} = 8 =$ س$_2$

∴ النقطتين هما أ(3، 62.6) ، ب(8، 79)

- نعين النقطتين على المستوى الاحداثي.

- نصل بين النقطتين أ، ب فيكون هذا هو خط الاتجاه العام.



شكل (7-2)

نجد معادلة خط الاتجاه العام

$$\frac{ص - 62.6}{س - 3} = \frac{79 - 62.6}{8 - 3} = \frac{16.4}{5}$$

5ص -313=16.4س-49.2+313

5ص=16.4س+263.8

$$ص = \frac{16.4}{5}س + \frac{263.8}{5}$$

ص= 3.28س+52.76

وهذه هي معادلة الاتجاه العام.

7-5) مركبة الفصل او المركبة الموسمية.

لعل هذه الظاهرة تعني في الدرجة الاولى ايجاد قيمة الظاهرة على اعتبار انهـا لم تتـأثر الا بالموسم ولحساب الاثار الموسمية هناك طريقتان.

أ- طريقة النسب للمتوسط المتحرك.

ب- من العلاقة ص= ت×ف×د×خ

فعندما تكون المركبة الاتجاهية والمركبة الدورية والخطأ معلومتين نستطيع ايجاد المركبة الموسمية. وهكذا الا اننا سنتناول الطريقة الاولى بشيء من التفصيل ولسهولة التعامل معها من خلال المثال التالي.

مثال: اذا كان انتاج مصنع معين خلال خمس سنوات حيث ان كمية الانتاج مأخوذة كل ثلاثة شهور وثبت البيانات بالجدول التالي والانتاج بآلاف الوحدات كما في الجدول (7-12).

ربع السنة	1976	1977	1978	1979	1980
الربع الاول	7	12	8	20	25
الربع الثاني	9	11	13	21	27
الربع الثالث	10	14	15	23	28
الربع الرابع	5	20	16	19	27

جدول (7-12)

والمطلوب ايجاد النسب الموسمية لهذا الانتاج باستخدام فكرة النسبة للمتوسط.

الحل: لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية.

- نجد مجموع مكونات الصفوف لمختلف سنوات الانتاج أي بجمع الانتاج في الربع الاول لكل سنة لمختلف السنوات الانتاجية.

- نجد المتوسط الموسمي من العلاقة

$$\text{المتوسط الموسمي} = \frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربع}}{\text{عدد السنوات}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7-7)$$

- نجد

$$\text{المتوسط الموسمي العام} = \frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الارباع}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8-7)$$

- نجد النسبة الموسمية لكل حالة من العلاقة

$$\text{النسبة الموسمية} = \frac{\text{المتوسط الموسمي}}{\text{المتوسط الكلي}} \times 100\% \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9-7)$$

والان نشكل جدول نلخص فيه كل ما نحصل عليه من حسابات في الخطوات السابقة كما في الجدول (7-13).

ربع السنة	المجموع الموسمي	المتوسط الموسمي	النسبة الموسمية
الربع الاول	72	14.4	87.27
الربع الثاني	81	16.2	98.18
الربع الثالث	90	18-	109.09
الربع الرابع	87	17.4	105.45
المتوسط العام	82.5	16.5	٪400.00

جدول (7-13)

ويمكننا قراءة النسب المئوية المختلفة من العمود الاخير ونلاحظ ان مجموعها هو 400 وذلك بضرب 100 في عدد الفصول.

ولتخليص قيم الظاهرة من تأثير التغيرات الموسمية فاننا نتبع الخطوات التالية.

- نقسم القيم الاصلية على النسب الموسمية.
- بضرب ناتج القسمة في مئة (100).

ونحصل على القيم التالية لكل قيمة فمثـ ًـ القيمة من الربع الاول لعام 1976 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح= $\frac{7}{87.27} \times 100 = 8.02$

القيمة من الربع الثاني لعام 176 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح

$$\frac{9}{98.18} \times 100 = \frac{900}{98.18} = 9.17$$

وهكذا لباقي القيم في الجدول المذكور.

جـ – التغيرات الجذرية والعرضية.

يمكن الحصول على تأثير كل من التغيرات الدورية والعرضية وذلك من العلاقة

ص=×ف×د×خ

وذلك بتخليص الظاهرة من تأثير كل من التغيرات الاتجاهية والتغيرات الموسمية معاً ويمكن الحصول عليهما معاً من العلاقة.

$$د . خ = \frac{ص}{ت \times ف} \qquad \text{(10–7)}$$

ونظراً لتداخلهما معا فيوجدا بشكل قيمة واحدة.

تمارين عامة على السلاسل الزمنية

س1: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية: 9، 13، 18، 19، 12، 21، 10 تمثل سلسلة زمنية والمطلوب ايجاد.

(أ) المتوسطات المتحركة بطول 3.

(ب) المتوسطات المتحركة بطول 5.

(جـ) المتوسطات المتحركة بطول 7

(د) المتوسطات المتحركة بطول 4.

(هـ) المتوسطات المتحركة بطول 6

(و) اوجد معامل الخشونة لهذه السلسلة

س2- الجدول التالي يمثل عدد الطلاب في مدرسة ما خلال الاعوام1978-1987

السنة	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد الطلاب	540	630	650	690	720	740	790	840	900	950

والمطلوب:

أ- رسم الشكل الانتشاري لهذه البيانات.

ب- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية

جـ- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة متوسط نصف السلسلة. ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- احسب القيم الاتجاهية عن طريق اسلوب المتوسطات المتحركة وبطول 3 .

س3- الجدول التالي يمثل انتاج مصنع ما من الوحدات المنتجة مقدرة بالاف الوحدات خلال عشرة سنوات.

السنوات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الوحدات المنتجة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

والمطلوب .

أ- رسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

ب- ايجاد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

جـ- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة المربعات الصغرى ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- اوجد معادلة الاتجاه العام باستخدام طريقة متوسط نصف السلسلة ثم اوجد القيم الاتجاهية لكل قيمة اصلية.

الفصل الثامن

الارقام القياسية

8-1) مقدمة:

لعل هذا الموضوع من اهم المواضيع التي تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث تربطنا في حياتنا اليومية بما سبق وبما سيكون لاحقاً وخاصة عند دراسة اسعار سابقة وربطها بالاسعار الحالية والمستقبلية لعدد من الاصناف وكذلك ايضا ربط كميات منتجة سابقا مع الانتاج الحالي والمستقبلي وهكذا دراسات اخرى. ولا نستطيع عمل دراسات من هذا النوع الا من خلال التعرف على ادوات ومقاييس لهذا الغرض تسمى بالارقام القياسية وعليه فاننا بدأ سنعطي التعريف التالي حتى نستطيع توضح هذا المفهوم.

- **تعريف:** الرقم القياسي هو اداة احصائية مصمم ليبين التغير في قيمة الظاهرة او مجموعة مرتبطة من الظواهر قيد الدراسة والتي لها علاقة بالنسبة لقيمتها في الزمن والمكان الجغرافي او أية خاصية اخرى.

وعندما نريد قياس التغير في قيمة الظاهرة فاننا ننسب قيمة الظاهرة في وقت معين الى قيمتها في وقت آخر او قيمتها في مكان جغرافي معين الى قيمتها في مكان جغرافي آخر. وقد تكون هناك زيادة او انخفاض في قيمة الظاهرة موضوع البحث.

فترة الاساس: هي الفترة الزمنية التي نقيس منها التغير في الظاهرة.

فترة المقارنة: هي الفترة الزمنية التي حصل خلالها تغير في الظاهرة اما اذا اردنا مقارنة التغير بين مكانين مختلفين فان المكان الذي نقيس منه التغير فيسمى مكان الاساس والمكان الذي حصل خلاله التغير يسمى مكان المقارنة .

2-8) استخدامات الارقام القياسية.

يمكن استخدام الارقام القياسية في كثير من مجالات الحياة وخاصة منها الاقتصادية ومنها.

1) مقارنة اسعار سلع مختلفة.

2) مقارنة تكاليف المعيشة في مكان مع مكان آخر.

4) يمكن التنبؤ بأحوال الاعمال والاقتصاد.

5) مقارنة عدد العمال في سنة مع عددهم في سنة سابقة.

6) مقارنة المستوى التعليمي في بلد ما وفي سنة ما مع مستواه في نفس البلد في سنة اخرى.

7) مقارنة عدد السكان في بلد وفي سنة ما مع عدد السكان في سنة اخرى.

وهناك الكثير الكثير من الاستعمالات للارقام القياسية .

3-8) خصائص سنة الاساس:

1) تحديد سنة الاساس بحيث لا تكون بعيدة عن سنة المقارنة.

2) ان تكون سنة الاساس ذات بنية من حيث موضع الرقم القياسي متشابهة مع ما هو عليه في سنة المقارنة.

3) ان تكون سنة الاساس ذات هدوء نسبي من انعكاساتها وداعياتها واثرها على الظاهرة قيد الدراسة.

4-8) انواع الارقام القياسية:

هناك عدة انواع من الارقام القياسية نذكر منها.

1) الارقام القياسية البسيطة.

تعريف: الرقم القياسي البسيط وهو الرقم المتمثل من نسبه متغير واحد في فترة المقارنة على نفس المتغير في فترة اخرى هي فترة الاساس ومن هذه الارقام.

أ) الرقم القياسي البسيط للسعر(منسوب السعر).

وهو النسبة المئوية لسعر سلعة معينة في سنة المقارنة والذي سنرمز له بالرمز س م الى سعرها في سنة الاساس والذي سنرمز له بالرمز س. وبصيغة رموز يمكن كتابته على النحو.

$$أ_{س} = \frac{س_م}{س_0} \times 100\% \quad \text{حيث } أ_س \text{: الرقم القياسي البسيط للاسعار} \qquad (1-8)......$$

مثال: اذا كان معدل سعر كيلو البندورة في عام 1990 هو 25 قرشاً وفي عام 1995 كان 27 قرشاً اوجد الرقم القياسي البسيط لسعر البندورة على اعتبار أن عام 1995 هو سنة الأساس.

الحل: $أ_{س} = \frac{27}{25} \times 100\% = \frac{2700}{25} = 108\%$ أي بزيادة قدرها 8٪ .

ب) الرقم القياسي البسيط للكميات (منسوب الكمية).

هو النسبة المئوية لكميات او حجوم سلعة معينة في فترة معينة والتي سنرمز لها بالرمز $ك_م$ الى كمياتها او حجومها في فترة والتي سنرمز لها بالرمز ك. وبصيغة رموز يمكن كتابتها على الصورة

$$أ_{ك} = \frac{ك_م}{ك_0} \times 100\ \% \qquad (2-8)..................$$

جـ) الرقم القياسي البسيط للقيمة (منسوب القيمة)

هو النسبة المئوية لقيمة سلعة معينة في فترة المقارنة والتي سنرمز لها بالرمز $ق_م = ك_م \times س_م$ الى قيمتها في سنة الاساس والتي سنرمز بالرمز $ق_0 = ك_0 \times س_0$ ويمكن صياغتها على النحو

$$أ_{ق} = \frac{ك_م \times س_م}{ك_0\ س_0} \times 100\% \qquad (3-8)..................$$

2) الارقام القياسية التجميعية البسيطة:

وهي تقسم الى ثلاثة اصناف نذكر منها ما يلي:

أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار= $\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}} \times 100\%$ ....(8-4)

ب) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات= $\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر}} \times 100\%$ ......(8-5)

جـ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة= $\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{م ر} س_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر} س_{0ر}} \times 100\%$ ...(8-6)

3- الارقام القياسية للاسعار والمرجحة بالكميات.

أ) الرقم القياسي البسيط للاسعار والمرجح بكميات سنة الاساس (رقم لاسبير للاسعار).

الرقم القياسي للاسبير= $\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر} س_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر} س_{0ر}} \times 100\%$ ....(8-7)

ب) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بكميات سنة المقارنة.

رقم باش للاسعار= $\dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{م ر} س_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{م ر} س_{0ر}} \times 100\%$ ....(8-8)

الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالمتوسط الحسابي لكميات سنة الاساس والمقارنة

ج) (رقم مارشال ابدجورت) $= \dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{رم} \times \left(\dfrac{ك_{رم} + ك_{ر0}}{2}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر0} \times \dfrac{ك_{رم} + ك_{ر0}}{2}}$ ....(8-9)

$= \dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} \left(ك_{مر} + ك_{ر0}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر} \left(ك_{مر} + ك_{ر0}\right)}$

(5) الرقم القياسي التجميعي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي لكميات سنة الاساس وسنة المقارنة.

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{مر} \sqrt{ك_{ر0} \times ك_{مر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر0} \sqrt{ك_{ر0} \times ك_{مر}}} \times 100\% \quad ......(8-10)$$

6) رقم فيشر للاسعار= رقم لاسبير × رقم باش وهو الرقم الأمثل

$$\text{رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} \times ك_{ر0}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر0} \times ك_{ر0}} \times \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} \times ك_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{ر0} \times ك_{مر}}} \times 100\% \quad ...(8-11)$$

(ب) الارقام القياسية للكميات والمرجحة بالاسعار:

وهي نفس الارقام السابقة ولكن بدلا من الترجيح بالكميات كما كان سابقا الان الكميات وترجح بالاسعار.

مثال: البيانات في جدول رقم (8-1) تبين اسعار(سر) بالدينار/طن وكميات (كر) بالاف الاطنان لثلاثة اصناف من الخضروات المباعة في السوق المركزي في عامي 1990، 1994.

الصنف	1990		1994	
الصنف	س.ر	ك.ر	س م ر	ك م ر
بندورة	250	160	350	80
باذنجان	150	15	200	25
فلفل أخضر	350	5	400	10

جدول (8-1)

المطلوب ايجاد

(1) الرقم القياسي البسيط لسعر صنف البندورة.

(2) الرقم القياسي البسيط التجميعي للاسعار.

(3) الرقم القياسي البسيط التجميعي للكميات.

(4) رقم لاسبير للاسعار.

(5) رقم باش للاسعار.

(6) رقم مارشال - ايدجوروث للأسعار (المرجح بالوسط الحسابي)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي.

(8) الرقم القياسي الامثل (رقم فيشر)

الحل: نكون جدول الحل (8–2).

الصنف	$س_{0ر}$	$ك_{0ر}$	$س_{مر}$	$ك_{مر}$	$س_{0ر}.ك_{0ر}$	$س_{مر}.ك_{0ر}$	$س_{0ر}.ك_{مر}$	$س_{0ر}.ك_{مر}$	$\frac{ك_{0ر}+ك_{مر}}{2}$	$س_{مر}\frac{ك_{0ر}+ك_{مر}}{2}$	$س_{0ر}\frac{ك_{0ر}+ك_{مر}}{2}$
البندورة	250	60	350	80	15000	21000	28000	20000	70	24500	17500
الباذنجان	150	15	200	25	2250	3000	5000	3750	20	4000	3000
الفلفل الاخضر	350	5	400	10	1750	2000	4000	35000	7.5	3000	2625
المجموع	750	80	950	115	19000	26000	37000	272500		31500	23125

جدول (8–2)

(1) الرقم القياسي البسيط للبندورة = $\frac{350}{250} \times 100 = 140\%$ أي بزيادة مقدارها 40٪.

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار= $\frac{950}{750} 100\% = 126.67\%$

(3)الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات= $\frac{115}{80} \times 100\% = 143.75\%$

(4) رقم لاسبير= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}.ك_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}.ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{26000}{19000} \times 100\% = 136.84\%$

(5) باش للاسعار= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}.ك_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}.ك_{مر}} \times 100\% = \frac{37000}{27250} \times 100\% = 135.77\%$

(6)رقم مارشال ابدجورث= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}\left(ك_{0ر}+ك_{مر}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}\frac{\left(ك_{0ر}+ك_{مر}\right)}{2}} \times 100\% = \frac{3150}{23125} \times 100\% = 136.22\%$

(7) ثم نكون جدول (8–3) تابع

$\text{س}_{\text{مر}}\sqrt{\text{ك}_{\text{0ر}} \times \text{ك}_{\text{مر}}}$	$\text{س}_{\text{0ر}}\sqrt{\text{ك}_{\text{0ر}} \times \text{ك}_{\text{مر}}}$	$\sqrt{\text{ك}_{\text{0ر}} \times \text{ك}_{\text{مر}}}$
24248.0	17320.00	69.28
3872.0	2904.00	19.36
2828.0	2474.5	7.07
30948	22698.5	المجموع

جدول (8–3)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي

$$\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{مر}}\sqrt{\text{ك}_{\text{0ر}}\,\text{ك}_{\text{مر}}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{0ر}}\sqrt{\text{ك}_{\text{0ر}}\,\text{ك}_{\text{مر}}}} \times 100 = \frac{30948}{22698.5} \times 100\%$$

$= 136.34\%$

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) $= \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باش}}$

$$\sqrt{135.77 \times 136.84} = 136.30\%$$

مثال: البيانات في جدول (8–14) تمثل الكميات المباعة واسعار مجموعة من الاصناف في سنتي 1975، 1979.

السنة / الصنف	سنة 75		سنة 79	
	$\text{ك}_{\text{0ر}}$	$\text{س}_{\text{0ر}}$	$\text{ك}_{\text{مر}}$	$\text{س}_{\text{مر}}$
أ	59.2	24	105.4	50
ب	22	22	31.7	48
جـ	2.8	27	10.3	49
د	8.7	28	6.6	54

جدول (8–4)

المطلوب : ايجاد

(1) الرقم القياسي للاسبير.

(2) الرقم القياسي لباش.

(3) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الحسابي.

(4) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الهندسي.

(5) الرقم القياسي لفيشر.

الحل: تكوين جدول الحل (8-5).

السنة / الصنف	سنة 75		سنة 79		سم ر.كم ر	سم ركم ر	سم ر ك م ر
	كم	سم ر	ك م ر	س م ر			
ب	22	22	31.7	48	1056	484	1521.6
جـ	2.8	27	10.3	49	137.2	75.6	504.7
د	8.7	28	6.6	54	469.8	243.6	356.4
المجموع	–	–	–	–	4323	2080	7652.7

جدول (8-5)

نكون جدول (8-6) تابع

سم . كم ر	كم+كم ر	سم ر (كم ر+كم)	سم (كم+ك ر م)	√(كم ر+كم)	سم ر √(كم ر كم)	سم ر √(كم ر كم)
2529.6	158.6	7930	3806.4	74.8818	3744.0887	1797.1626
697.4	53.7	2577.6	1181.4	26.40083	1267.5999	580.9833
278.1	13.1	641.9	353.7	5.3703	263.1441	144.9978
184.8	15.3	826.2	428.2	7.5776	409.903	212.1728
3689.9	240.7	11975.7	5769.9	114.238	5684.0231	2735.3164

جدول (8-6)

(1) الرقم القياسي للاسبير $= \dfrac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{مر}}\,\text{ك}_{0\text{ر}}}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\text{ر}}.\text{ك}_{0\text{ر}}} \times 100\%$

$= \dfrac{4323}{2080} \times 100\% = 207.8365\%$

أي بزيادة مقدارها 107٪

(2) الرقم القياسي لباش $= \dfrac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{مر}}\,\text{ك}_{\text{مر}}}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\text{ر}}.\text{ك}_{\text{مر}}} \times 100\%$

$= \dfrac{7652.7}{3689.9} \times 100\% = 207.3959\%$

أي بزيادة 107.3959٪

(3) الرقم القياسي لمارشال $= \dfrac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{مر}}\left(\text{ك}_{0\text{ر}}+\text{ك}_{\text{مر}}\right)}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\text{ر}}\left(\text{ك}_{0\text{ر}}+\text{ك}_{\text{مر}}\right)} \times 100\%$

$= \dfrac{11975.7}{5769.9} \times 100\% = 207.5547\%$

أي بزيادة 107.55٪

(4) رقم قياسي مارشال $= \dfrac{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\text{ر}}\sqrt{\text{ك}_{0\text{ر}} \cdot \text{ك}_{\text{مر}}}}{\sum\limits_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\text{ر}}\sqrt{\text{ك}_{0\text{ر}} \cdot \text{ك}_{\text{مر}}}} \times 100\%$

$= \dfrac{5684.0231}{2735.3164} \times 100\% = 207.8023\%$

أي بزيادة 107.8013

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) = $\sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باش}}$

$= \sqrt{207.8365 \times 207.9359}$

$= \sqrt{43104.438} = 207.6161\%$

أي بزيادة 107.6161٪

مثال: البيانات التالية في جدول (8–7) تمثل الاسعار والكميات المباعة لعدة اصناف سنة 1975، 1979.

	1975		1979	
الصنف	س0ر	ك0ر	كم ر	سم ر
البندورة	53.2	24	105.4	50
الباذنجان	22	22	37.7	48
الفلفل	2.8	27	10.3	49
العنب	8.7	28	6.6	54
المجموع	86.7	101	160	201

جدول (8–7)

المطلوب: ايجاد الارقام القياسية المختلفة على اعتبار ان 1975 سنة اساس1979 سنة مقارنة.

الحل: نكون جدول الحل رقم (8–2)

الصنف	كم ر سم ر	كم ر س0 ر	ك0 ر سم ر	ك0 ر س0 ر
البندورة	52.70	2529.6	2660	1276.8
الباذنجان	1809.6	829.4	1056	484
الفلفل	504.7	278.1	137.2	75.6
العنب	356.4	184.8	469.8	243.6
المجموع		3821.9	4323	2080

جدول (8–8)

ثم نبدأ بتطبيق العلاقات الرياضية واستخدام الجداول

(1) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}} 10\% = \frac{201}{101} 100\% = \frac{20100}{101}$

$= 199\%$

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{160}{86.7} \times 100\% = 184.54\%$

(3) رقم لاسبير للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} ك_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{432300}{2080} \times 100\% = 207.84\%$

(4) رقم باش للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} . ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{م ر}} \times 100\% = \frac{7940.7}{3821.9} \times 100 = 207.77\%$

(5) رقم فيشر للأسعار $= \sqrt{207.84 \times 207.77} = 207.8\%$

$س_{0ر} \times \frac{ك_{م ر} + ك_{0ر}}{2}$	$س_{م ر} \times \frac{ك_{م ر} + ك_{0ر}}{2}$	$\sqrt{ك_{م ر} \times ك_{0ر}}$	$س_{0ر} \sqrt{ك_{م ر} \times ك_{0ر}}$	$س_{م ر} \sqrt{ك_{م ر} \times ك_{0ر}}$
1900.8	3960	74.88	1797.12	3744
656.7	1432.8	28.8	633.6	1382.4
176.85	320.95	5.37	144.99	263.13
214.2	413.1	7.58	212.24	409.32
2948.55	6126.85		2787.95	5798.85

جدول (8–9)

(6) رقم مارشال - ابدجورت للاسعار = $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر} \times \left(\frac{ك_{1ر} + ك_{0ر}}{2}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \times \left(\frac{ك_{1ر} + ك_{0ر}}{2}\right)} \times 100\%$

$$= \frac{6126.85}{2948.55} \times 100\%$$

$$= 207.79\%$$

(7) رقم ايدجورت مارشال للوسط الهندسي للاسعار.

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر} \sqrt{ك_{1ر} \times ك_{0ر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \sqrt{ك_{1ر} \times ك_{0ر}}} \times 100\% = \frac{5798.85}{2787.95} \times 100\%$$

$$= 208\%$$

مثال: هناك خطة لرفع مستوى معيشة الفرد بنسبة 150٪ لما كان عليه عام 1986 لكن يجب ان يكون دخل الاسرة التي تتقاضى 100 دينار كم يجب ان يكون دخلها عام 1995؟

الحل: 150٪-100=50٪

$\therefore$ $100 \times \frac{50}{100} = 50$ دينار مقدار الزيادة

الدخل الجديد= 100+50=150 دينار

5-8) وهناك انواع اخرى من الأرقام القياسية وأهمها:-

(1) الرقم القياسي للانتاج الزراعي.

(2) الرقم القياسي للانتاج الصناعي.

(3) الرقم القياسي للبناء.

(4) الرقم القياسي الحالي.

(5) الرقم القياسي لتكاليف المعيشة وغيرها...

وقد قسمت ميزانية الأسرة في الاردن كما يلي:-

1) المواد الغذائية (40.5٪) وتشمل الحبوب واللحوم والفواكه والخضروات، والالبان والكحول والتبغ وسلع اخرى.

2) الملابس والاحذية (8.15٪)

3) السكن (26.868٪)

4) السلع والخدمات الاخرى (24.482٪)

٪100

$$\text{القدرة الشرائية} = \frac{\text{الرقم القياسي لسنة الاساس}}{\text{الرقم القياسي لسنة المقارنة}} = \frac{10}{\text{الرقم القياسي للسنة المطلوبة}} \quad \ldots\ldots(8-12)$$

مقدار التضخم: الرقم القياسي لمستوى المعيشة لسنة المقارنة- الرقم القياسي لمستوى المعيشة لسنة الاساس .....(8-13)

مثال: اذا كان الجدول التالي يمثل مستوى المعيشة في بلد ما لسنوات مختلفة وفي مرحلتين فاذا تغيرت سنة الاساس من 1985 الى 1992 فاوجد:

أ) القدرة الشرائية في عام 1995

ب) اوجد مقدار التضخم الناشئ في جدول (8–10).

السنوات	ارقام السلسلة الاولى	ارقام السلسلة الثانية
1985	100	57.2
1990	155.4	88.9
1992	174.8	100
1995	189.83	108.6

جدول (8–10)

الحل:

أ) القدرة الشرائية = $\frac{100}{189.83}$ = 0.5268

(ب) مقدار التضخم=189.83−100=89.83٪

مستوى التضخم = الرقم القياسي لتكاليف المعيشة −100٪ ....(8–14)

* القدرة الشرائية لوحدة النقد في سنة ما منسوبة اليه في سنة الاساس:–

$$\text{القدرة الشرائية}=\frac{\text{الرقم القياسي لسنة الاساس}}{\text{الرقم القياسي لسنة المقارنة}}$$ ....(8–15)

* **مثال:** على اعتبار ان هناك خطة لرفع مستوى المعيشة بنسبة 150٪ كما كان عليه عام 1986، فكم يجب ان يكون دخل الاسرة التي تتقاضى راتب شهري (100) دينار في عام 1995.

الدخل = مستوى المعيشة× $\frac{150}{100}$ = $189.84\times\frac{150}{100}$ = 284.36 دينار.

مثال: في ما يلي جدول (8–11) بالارقام القياسية لتكاليف المعيشة لبلد أ محسوبة لسنة الاساس 1960 فاذا عدلت سنة الاساس لتصبح 1962 فاحسب الارقم القياسية لباقي السنوات.

السنوات	الرقم القياسي للاساس 1960	1962
158	90	
1959	80	
1960	120	
1961	140	
1962	150	100
1963	160	
1964	140	
1965	1970	

جدول (8–11)

الحل: نبدأ بوضع رقم قياسي 100٪ مقابل سنة الاساس الجديدة ثم باستخدام النسبة والتناسب نحصل علىباقي الارقام القياسية الاخرى ممثلاً لحساب الرقم القياسي لجديد العام 1961.

100← 150

س ← 140

$س = \frac{140 \times 100}{150} = 93.33\%$ وهكذا نستمر لباقي القيم.

الرقم القياسي للقيمة $ق_م = س_م \times ك_م$

$ق_0 = س_0 \times ك_0$

6-8) اختبار الارقام القياسية

هناك مبدآن

(1) المبدأ الاول: اختبار الانعكاس في الزمن

الرقم القياسي × بديل الرقم القياسي بالزمن $\overset{?}{=}$ 1

(2) المبدأ الثاني : اختبار الانعكاس في المعامل

= الرقم القياسي× بديل الرقم القياسي بالمعامل $\overset{?}{=}$ الرقم القياسي للقيمة.

تعريف: بديل الرقم القياسي بالزمن هو الرقم القياسي بعد استبدال سنة الاساس بسنة المقارنة.

مثال: هل الرقم القياسي البسيط للاسعار يحقق اختبار الانعكاس بالزمن؟

الرقم القياسي البسيط للاسعار$= \frac{س_م}{س_0} \times \frac{س_{0ر}}{س_{مر}} = \frac{1}{1} = 1$

∴ الرقم القياسي البسيط للاسعار يحقق الاختبار في الزمن.

تعريف: بديل الرقم القياسي بالمعامل هو الرقم القياسي بعد استبدال السعر بالكمية.

مثال: هل الرقم القياسي البسيط للاسعار يحقق اختبار الانعكاس في المعامل.

الرقم القياسي البسيط للاسعار$= \frac{س_م}{س_0} \times \frac{ك_م}{ك_0} = \frac{س_م ك_م}{س_0 ك_0} = \frac{ق_م}{ق_0}$

- الرقم القياسي للقيمة عليه فان الرقم القياسي البسيط يحقق اختبار الانعكاس في المعامل.

مثال: هل الرقم القياسي التجميعي للاسعار يحقق

(1) اختبار الانعكاس في الزمن

(2) اختبار الانعكاس في المعامل.

$$\text{الرقم القياسي التجميعي} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}} \times \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر}} = \frac{1}{1} = 1$$

∴ تحقق الانعكاس في الزمن

أما لتحقيق الانعكاس في المعامل

$$\frac{\sum س_{1ر}}{\sum س_{0ر}} \times \frac{\sum ك_{1ر}}{\sum ك_{0ر}} \neq \frac{\sum س_{1ر} ك_{1ر}}{\sum س_{0ر} ك_{0ر}} = \frac{\sum ق_{1ر}}{\sum ق_{0ر}}$$

∴ لايحقق الانعكاس في المعامل.

مثال: هل رقم لاسبير يحقق

(1) الانعكاس بالزمن

(2) اختبار الانعكاس بالمعامل

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر} ك_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} ك_{0ر}} \times \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} ك_{1ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{1ر} ك_{1ر}} \neq 1$$

لايحقق اختبار الانعكاس بالزمن.

مثال: هل رقم لاسبير يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل

$$\frac{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}}{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}} \times \frac{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}}{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}} \neq \frac{\sum \text{س}_{\text{م}}\, \text{ك}_{\text{م}}}{\sum \text{ك}_{\text{0ر}}\, \text{س}_{\text{0ر}}} = \frac{\sum \text{ق}_{\text{مر}}}{\sum \text{ق}_{\text{0ر}}}$$

∴ لا يحقق الانعكاس بالمعامل.

مثال: هل رقم باش يحقق

(1) اختبار الانعكاس بالزمن

(2) اختبار الانعكاس بالمعامل.

الحل: (1) $\frac{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}}{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}} \times \frac{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}}{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}} \neq 1$

لا يحقق اختبار الانعكاس بالزمن .

بالمعامل.

$$\frac{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}}{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{مر}}} \times \frac{\sum \text{س}_{\text{0ر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}}{\sum \text{س}_{\text{مر}}\, \text{ك}_{\text{0ر}}} \neq \frac{\sum (\text{ق}_{\text{مر}})}{\sum \text{ق}_{\text{0ر}}}$$

∴ لا يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل

ملاحظة: عند اختبار الانعكاس بالزمن فاننا

نستبدل م ←0

0← م

وعند الاختبار بالمعامل فاننا نقوم باستبدال

س←ك

ك←س.

مثال: هل رقم فيشر القياسي يحقق (1) الانعكاس بالزمن.

(2) الانعكاس بالمعامل.

الحل: (1) بالنسبة للانعكاس بالزمن:

$$\sqrt{\frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}} \times \sqrt{\frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}}$$

$1 = 1$ ∴ يحقق الانعكاس في الزمن

(2) ولاختبار الرقم القياسي الانعكاس في المعامل نستبدل:

ك ← س

س ← ك

$$\sqrt{\frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}} \times \sqrt{\frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} \times \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{0ر}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}\right)^2}{\left(\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}\right)^2}} = \frac{\sum \text{س}_{م ر}\text{ك}_{م ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}} = \frac{\sum \text{ق}_{م}}{\sum \text{ق}_{0ر}}$$

∴ يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

مثال: هل مارشال- ايدجورت يحقق اختبار الانعكاس بالزمن

$$\text{رقم مارشال- ايدجورت} = \frac{\sum س_{م ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})}{\sum س_{0ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})} \times \frac{\sum س_{0ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})}{\sum س_{م ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})} = 1$$

وهذا يعني ان رقم مارشال يحقق الانعكاس بالزمن.

مثال: هل مارشال - ايدجورت يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

الحل : $$\frac{\sum س_{م ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})}{\sum س_{0ر}(ك_{0ر}+ك_{م ر})} \times \frac{\sum ك_{م ر}(س_{0ر}+س_{م ر})}{\sum ك_{0ر}(س_{0ر}+س_{م ر})} \neq \frac{\sum ق_{م ر}}{\sum ق_{0ر}}$$

لايحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

مثال: هل الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالزمن

$$\text{الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي} = \frac{\sum س_{م ر}\sqrt{(ك_{0ر}\ ك_{م ر})}}{\sum س_{0ر}\sqrt{(ك_{0ر}\ ك_{م ر})}} \times \frac{\sum س_{0ر}\sqrt{(ك_{0ر}\ ك_{م ر})}}{\sum س_{م ر}\sqrt{(ك_{0ر}\ ك_{م ر})}} = 1$$

∴ الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالزمن

مثال: هل الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالمعامل

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\sum س_{م ر}\sqrt{ك_{0ر}\ ك_{م ر}}}{\sum س_{0ر}\sqrt{ك_{0ر}\ ك_{م ر}}} \times \frac{\sum ك_{م ر}\sqrt{س_{0ر}\ س_{م ر}}}{\sum ك_{0ر}\sqrt{س_{0ر}\ س_{م ر}}} \neq \frac{\sum ق_{م ر}}{\sum ق_{0ر}}$$

لايحقق الانعكاس بالمعامل.

الانعكاس بالمعامل س←ك بالزمن م ←0

وهذا ملخص للاختبارات لجميع الارقام القياسية ونتيجة كل اختبار

* اختبار الانعكاس في المعامل كما هو موضح في جدول (8–12)

البيان	البديل بالمعامل	الاختبار	النتيجة
(1) $\frac{س_م}{س_0} \times 100\%$	$\frac{ك_م}{ك_0}$	$\frac{س_م ك_م}{س_0 ك_0} = ق$ $\frac{ق_م}{ق_0}$	اجتاز
(2) $\frac{ك_م}{ك_0} \times 100\%$	$\frac{س_م}{س_0}$	$= ق$	اجتاز
(3) $\frac{\sum س_م}{\sum س_0}$	$\frac{\sum ك_{مر}}{\sum ك_{0ر}}$	$\neq ق$	لم يجتز
(4) $\frac{\sum س_{مر}\, ك_{مر}}{\sum س_{0ر} . ك_{مر}}$	$\frac{\sum ك_{مر} ك_{مر}}{\sum ك_{0ر} . ك_{مر}}$	$\neq ق$	لم يجتز
(5) $\frac{\sum س_{مر}\, ك_{0ر}}{\sum س_{0ر}\, ك_{0ر}}$	$\frac{\sum ك_{مر}\, س_{0ر}}{\sum ك_{0ر}\, س_{0ر}}$	$\neq ق$	لم يجتز
(6) $\frac{\sum س_م (ك_{0ر} + ك_{مر})}{\sum س_0 (ك_0 + ك_{مر})}$	$\frac{\sum ك_{مر} (س_{0ر} + س_{مر})}{\sum ك_{0ر} (س_0 + س_{مر})}$	$\neq ق$	لم يجتز
(7) $\frac{\sum س_م \sqrt{ك_0 ك_م}}{\sum س_0 \sqrt{ك_0 ك_م}}$	$\frac{\sum ك_{مر} \sqrt{س_{0ر} س_{مر}}}{\sum ك_{0ر} \sqrt{س_{0ر} س_{مر}}}$	$\neq ق$	لم يجتز
(8) $\sqrt{\frac{\sum س_{مر}\, ك_{مر}}{\sum س_{0ر}\, ك_{مر}} \times \frac{\sum س_{مر}\, ك_{0ر}}{\sum س_{0ر}\, ك_{0ر}}}$	$\sqrt{\frac{\sum ك_{مر}\, س_{مر}}{\sum ك_{0ر}\, س_{مر}} \times \frac{\sum ك_{مر}\, س_{0ر}}{\sum ك_{0ر}\, س_{0ر}}}$	$= ق$	اجتاز

جدول (8–12)

اما اذا كان: الرقم القياسي × بديل الرقم القياسي في المعامل= الرقم القياسي للقيمة فاننا نقول بانه احتاز اختبار الانعكاس في المعامل.

* اختبار الانعكاس في الزمن كما هو موضح في جدول (8–13)

البيان	البديل بالزمن	الاختبار	النتيجة
(1) $\frac{\text{س}_{م}}{\text{س}_{0}} \times 100\%$	$\frac{\text{س}_{0}}{\text{س}_{م}}$	$=1$	اجتاز
(2) $\frac{\text{ك}_{م}}{\text{ك}_{0}} \times 100\%$	$\frac{\text{ك}_{0}}{\text{ك}_{م}}$	$=1$	اجتاز
(3) $\frac{\sum \text{س}_{م}}{\sum \text{س}_{0}}$	$\frac{\sum \text{س}_{0ر}}{\sum \text{س}_{مر}}$	$=1$	اجتاز
(4) $\frac{\sum \text{س}_{مر}\ \text{ك}_{مر}}{\sum \text{س}_{0ر}.\text{ك}_{مر}}$	$\frac{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{ك}_{مر}.\text{ك}_{0ر}}$	$\neq 1$	لم يجتز
(5) $\frac{\sum \text{س}_{مر}\text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\text{ك}_{0ر}}$	$\frac{\sum \text{ك}_{مر}\ \text{س}_{0ر}}{\sum \text{س}_{مر}\text{ك}_{مر}}$	$\neq 1$	لم يجتز
(6) $\frac{\sum \text{س}_{م}\left(\text{ك}_{0ر}+\text{ك}_{مر}\right)}{\sum \text{س}_{0}\left(\text{ك}_{0}+\text{ك}_{مر}\right)}$	$\frac{\sum \text{س}_{0ر}\left(\text{ك}_{مر}+\text{ك}_{0ر}\right)}{\sum \text{س}_{مر}\left(\text{ك}_{مر}+\text{ك}_{0ر}\right)}$	$=1$	اجتاز
(7) $\frac{\sum \text{س}_{م}\sqrt{\text{ك}_{0}\text{ك}_{م}}}{\sum \text{س}_{0}\sqrt{\text{ك}_{0}\text{ك}_{م}}}$	$\frac{\sum \text{س}_{0ر}\sqrt{\text{ك}_{مر}\text{ك}_{0ر}}}{\sum \text{س}_{مر}\sqrt{\text{ك}_{مر}\text{ك}_{0ر}}}$	$=1$	لم يجتز
(8) $\sqrt{\frac{\sum \text{س}_{مر}\ \text{ك}_{مر}}{\sum \text{س}_{0ر}\ \text{ك}_{مر}} \times \frac{\sum \text{س}_{مر}\ \text{ك}_{0ر}}{\sum \text{س}_{0ر}\ \text{ك}_{0ر}}}$	$\sqrt{\frac{\sum \text{ك}_{مر}\text{س}_{مر}}{\sum \text{ك}_{0ر}\text{س}_{مر}} \times \frac{\sum \text{ك}_{مر}\text{س}_{0ر}}{\sum \text{ك}_{0ر}\text{س}_{0ر}}}$	$=1$	اجتاز

جدول (8–13)

الفصل التاسع

الاحصاءات الحيوية

9-1) تعريف الاحصاء السكاني:

(الاحصاء السكاني هو الدراسة الاحصائية للسكان وخصائصهم وفعالياتهم وتغيراتهم من حيث التكاثر والوفاة والانتقال والعوامل التي تؤثر فيها والنتائج التي تنشأ عنها)

9-2) اهمية الاحصاء السكاني:

قبل الدخول في شرح اهمية الاحصاء السكاني لابد من تعريف السكان وهم مجموعة من الناس تعيش ضمن حدود بلد معين سواء كانوا يعيشون بصفة دائمة او مؤقتة.

وتنبع اهمية الاحصاء السكاني من انه يقوم بدراسة السكان وجمع البيانات المختلفة عنهم وهذه البيانات تعتبر مهمة جدا وخاصة بالنسبة لصانعي القرار والعمليات التخطيطية فالقرار الناجح هو القرار الذي يعتمد على معلومات دقيقة ونلاحظ بأن السكان هم مصدر النشاطات الاقتصادية والثقافية والصحية والاجتماعية وغيرها وهذه النشاطات مترابطة ويؤثر بعضها في بعض.

ويمكن الحصول على البيانات السكانية من مصدرين.

أ- **التعداد السكاني**: وهي عملية حصر الافراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع البيانات التي تصف افراد المجتمع وهناك نوعان من التعداد:

1- التعداد النظري: وهو حصر الفرد في المكان الذي تعود ان يقيم فيه الشخص بشكل دائم بغض النظر عن مكان ووجوده الفعلي لحظة التعداد.

2- **التعداد الفعلي**: حصر الاشخاص في مكان وجودهم لحظة التعداد حتى ولو كان

زائرا (تعداد واقعي).

وكان آخر تعداد للسكان هو في الاردن سنة 1976 ومن اهدافه تكوين خامات للدراسة والبحوث.

9-3) انواع البيانات التي يتم حصرها:

1) بيانات عن خصائص الافراد كالعمر، الجنس، والديانة.

2) بيانات عن تكوين الاسرة كالعدد والسكن.

3) بيانات عن الخصوبة مثل عدد المواليد للنساء المتوزجات والارامل.

- كيفية جمع البيانات:

1) تحديد الهدف.

2) وضع الوحدات الادارية على الخرائط ثم تحديدها على الارض.

3) تحديد اجزاء الوحدات الادارية الى قرية وقضاء.

4) ترقيم الطرق والالوية.

5) حصر المكان.

6) تقييم البيانات: وذلك عن طريق اضافة المواليد والضيوف الى البيانات في ليلة التعداد، وطرح الوفيات والغائبين في ليلة التعداد حتى نحصل على ارقام مطابقة للارقام في ليلة التعداد.

9-4) التحرك السكاني

والتحرك السكاني يحتوي على نوعين من التحركات هما التحرك الداخلي (الهجرة الداخلية) والتحرك الخارجي ويسمى بالهجرة الخارجية.

1- الهجرة الداخلية

وهي انتقال السكان من المناطق الريفية الزراعية الى المدن حيث توجد فيها المصانع وهذا يتم في داخل البلد الواحد والدوافع للهجرة هي ما يلي:-

- الدوافع المادية كنقص في الموارد المحلية وضيق العيش مما يدفع عدد من السكان الى الانتقال الى حيث توجد الثروات الطبيعية وفرص العمل الجيدة والمغرية مما يؤدي الى رفع مستوى المعيشة وغالبا ما تكون هذه الاقاليم اكثر انتعاشا ورواجا مما يساعد السكان المهاجرين اليها في مما رسة اعمالهم التجارية ومزاولة المهن الحرة والحصول على اجور مرتفعة.

- الكثافة السكانية ويقصد بها ارتفاع عدد السكان في بعض الاقاليم نتيجة لعوامل اقتصادية او اجتماعية او ثقافية ففي هذه الحالة اما تلجأ الدولة الى توزيع السكان الى أقاليم اخرى اقل كثافة او ان يلجأ الافراد الى الهجرة الى اقاليم اخرى لتحسين ظروف معيشتهم.

- المناخ المختلف في الاقاليم المختلفة داخل البلد الواحد حيث ان معظم الناس يفضل الانتقال الى الاماكن ذات الطقس المعتدل.

- بعض الاقاليم داخل البلد الواحد تعتبر اكثر تطورا من غيرها بوجود المرافق العامة المتطورة والخدمات المتطورة مما يؤدي الى انتقال السكان الى هذه الاقاليم للاستفادة من الامتيازات الموجودة فيها.

اما الهجرة الداخلية فلا تأثير لها على عدد السكان.

2- الهجرة الخارجية

وهي انتقال السكان من بلد الى اخر ودوافع هذا النوع من الهجرة ما يلي:-

- دوافع اقتصادية - دوافع سياسية - طلبا للعلم

وهذا النوع من الهجرة توجد له اثاره على كل من البلد المرسل للممهاجرين والبلد المستقبل للمهاجرين ومن هذه الاثار مايلي:-

1) نقص عدد السكان في البلد المرسل وزيادته في البلد المستقبل.

2) تركيبة السكان من حيث العمر والجنس والمهنة في كل من البلد المرسل والبلد المستقبل.

ب- المصدر الثاني للبيانات السكانية هو الاحصاءات الحيوية

9-5) الاحصاءات الحيوية:

(وهي المتعلقة بمجموع الاحداث والحوادث التي تصيب الانسان منذ ولادته حتى وفاته). والاحصاءات الحيوية في اغلب الاحيان تتوفر لدى دوائر حكومية حيث تقوم الدولة بتنظيم عملية تقديم البيانات في مكاتب معينة وفي فترة زمنية محددة اجباريا. وسنقوم بشرح بعض عناصر الاحصاءات الحيوية ومنها ما يلي:

1) الخصوبة 2) الوفيات

تعريف الخصوبة: هي القدرة الواقعية للمرأة على الانجاب وتقدر بعدد الاطفال الذين تنجبهم بين 15-49 سنة.

عوامل الخصوبة: والخصوبة ترتبط بعدة عوامل منها مايلي:-

أ- الحروب وتؤدي الى تأجيل الزواج ووجود الامراض وسوء التغذية وغلاء المعيشة وارتفاع الاجور وكل ذلك يؤدي الى:

1- النقص في معدلات المواليد.

2- ارتفاع معدل المواليد بعد الحرب.

3- نسبة المواليد الذكور اعلى من الاناث.

ب- الاوبئة والامراض والمجاعات. حيث ان 30٪ فأكثر من معدل الوفاة يكون نتيجة سوء التغذية.

ج- درجة التطور الحضاري والتناسب العكسي مع الخصوبة.

د- العوامل الاجتماعية والاقتصادية كالمعتقدات وظروف المعيشة والام العاملة.

9-6) مقاييس الخصوبة:

وتقسم الى مجموعتين رئيسيتين:

أ- معدلات ونسب المواليد ب - مقاييس النمو السكاني

أ – معدلات ونسب المواليد:

وتحتوي على المعدلات التالية:

$$\text{1) معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد السكان في نصف سنة}} \times 100 \quad \ldots\ldots\ldots(1-9)$$

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال عام 1985 في احدى المحافظات (30000) وعدد السكان في هذه المحافظات (400000) فأوجد معدل المواليد الخام لكل 1000 نسمة من السكان.

$$\text{معدل المواليد الخام} = \frac{30000}{400000} \times 1000 = 75 \text{ بالألف}$$

$$\text{2) معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times 100 \quad \ldots\ldots(2-9)$$

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 80000 في احدى البلدان وكان عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة يساوي 900000 فأوجد معدل الخصوبة العام

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{80000}{900000} \times 1000 = 88.9 \text{ بالألف}$$

$$\text{3) معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة}} \times 1000 \quad \ldots\ldots(3-9)$$

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 100000 في احدى البلدان وكان عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة يساوي

1500000 فأوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

$$\text{معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{100000}{1500000} \times 1000 = 66.7 \text{ بالألف}$$

4) معدل الخصوبة حسب فئات العمر = $\frac{\text{عدد المواليد الاحياء لفئة سن معينة}}{\text{عدد الاناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}} \times 1000$ ...(9-4)

مثال: اذا كان عدد المواليد الأحياء 200000 والتي أنجبتها 2000000 سيدة في فئة السن 20 – 25 سنة في احدى البلدان فأوجد معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 – 25

$$\text{معدل الخصوبة حسب فئة السن } 20-25 = \frac{200000}{2000000} \times 1000 = 100 \text{ بالألف}$$

5) الخصوبة الكلية (النظرية) = $\frac{\text{المواليد الأحياء}}{\text{عدد الاناث في سن الانجاب}} \times 1000$ ....(9-5)

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء في بلد ما (300000) وعدد الاناث في سن الانجاب 3.000.000 فأوجد معدل الخصوبة الكلية

$$\text{الخصوبة الكلية} = \frac{300000}{3000.000} \times 1000 = 100 \text{ بالألف}$$

9-7) مقاييس النمو السكاني

ان التغير في عدد السكان ينتج عن الزيادة الطبيعية وهي الفرق بين المواليد وعدد الوفيات بالاضافة الى صافي الهجرة الذي يشكل الفرق بين اعداد المهاجرين الى البلد والمهاجرين منه ومن مقاييس النمو السكاني:

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{اجمالي عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad ......(6-9)$$

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء في احدى البلدان 300000 وكان عدد السكان في منتصف السنة 10.000.000 وعدد الوفيات 100000 فالمطلوب استخراج معدل الزيادة الطبيعية لهذا البلد.

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{300000 - 100000}{10000000} \times 1000$$

$$= \frac{200000}{10000000} \times 1000 = 20 \text{ بالألف}$$

9-8) التقديرات السكانية وايجادها بطريق نظام المتوالية العددية:

والافتراض في هذا النظام ان السكان يتزايدون او يتناقصون بمقدار عددي ثابت من سنة لاخرى في الفترةالفاصلة بين تعدادين للسكان. ولتقدير عدد السكان فاننا نستخدم الصيغة التالية:-

$$\text{ح} = \text{ع}1 + (\text{ن}-1)\text{ز} \quad ....(7-9)$$

حيث ان ح= التعداد اللاحق ع1= التعداد الاول

ت= عدد السنوات بضمنها سنة التعداد الاول

ز= المقدار الثابت للزيادة السكانية (اساس المتوالية العددية)

مثال: اذا كان عدد سكان بلد ما عام 1960، 1970 على التتابع 3 ملايين، 3.8 مليون المطلوب تقدير حجم السكان عام 1980 باتباع نظام المتوالية العددية.

الحل: تحتسب اولا كمية الزيادة السنوية الثابتة (ز)

$0.8 = 3 + (11-1)ز$

$0.8 = 3 + 10ز$

$3.8 - 3 = 10ز$

$0.8 = 10ز$

$ز = \frac{0.8}{10} = 0.08$

والان نقدر عدد السكان عام 1980

$ح_{80} = 3 + (21-1)0.08$

$ح_{80} = 3 + 20 \times 0.08$

$ح_{80} = 3 + 1.6 = 4.6$ مليون

9-9) مقاييس الوفيات

يوجد عدة عوامل تؤثر على الوفيات اهمها:

1- الحروب ومضاعفاتها الصعبة

2- المجاعات والامراض المعدية ترفع اعداد الوفيات

3- التقدم الحضاري والصحي يخفض معدل الوفيات ومن اهم معدلات الوفيات ما يلي:-

أ- معدل الوفيات الخام= $\frac{\text{اجمالي عدد الوفيات عدا المواليد الموتى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$ ...(9-8)

مثال: اذا كان عدد الوفيات عد المواليد موتى 100000 وكان عدد السكان في منتصف العام 8.000.000 فاحسب معدل الوفيات الخام بالالاف.

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{100000}{8000000} \times 1000 = 12.5 \text{ بالألف}$$

$$\text{ب) معدل وفيات الأمومة} = \frac{\text{عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad ...(9-9)$$

مثال: اذا كان عدد المواليد الاحياء في محافظة ما 250000 وعدد وفيات النساء اثناء الحمل والولادة 2000 فاحسب معدل وفيات الامومة.

$$\text{معدل وفيات الامومة} = \frac{2000}{250000} \times 1000 = 8 \text{ بالألف}$$

$$\text{ج) معدل وفيات الأطفال الرضع لاقل من سنة} = \frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \quad ..(10-9)$$

مثال: اذا كان عدد وفيات الاطفال الرضع (الاقل من سنة) 5000 وكان عدد المواليد الاحياء 250000 حسب معدل وفيات الاطفال الرضع

$$\text{معدل وفيات الاطفال الرضع} = \frac{5000}{250000} \times 1000 = 20 \text{ بالألف}$$

$$\text{د) معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة (اقل من شهر)} = \frac{\text{عدد الوفيات لعمر أقل من 28 يوم}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \quad ...(11-9)$$

مثال: اذا كان عدد الاطفال المتوفين من أعمار 28 يوما فأقل يساوي وعدد المواليد احياء 250000 فاحسب معدل وفيات الاطفال حديث الولادة.

معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة= $\frac{150}{250000} \times 1000 = 0.6$ بالألف

$$\text{هـ) معدل وفيات الطفولة المبكرة} = \frac{\text{عدد الوفيات (من 28 يوم الى 11 شهر}}{\text{عدد المواليد الأحياء – عدد الوفيات اقل من 28 يوم}} \times 1000 \quad \ldots(12-9)$$

مثال: اذا كان عدد وفيات الاطفال في سن مبكرة (28 يوما الى 11 شهرا) 2500 وعدد المواليد احياء 230470 وعدد الوفيات في السن الاقل من 28 يوما 470 وفاة احسب معدل وفيات الطفولة المبكرة.

معدل وفيات الطفولة المبكرة=

$$= \frac{2500}{230470-470} \times 1000 = \frac{2500000}{2300000} = 10.9 \approx 11$$ بالألف

الفصل العاشر

نظرية الاحتمالات

10-1) مقدمة:

تبحث نظرية الاحتمالات في الحوادث التي نتائجها غير مؤكدة بل عشوائية وهنا نعطي التعريف التالي.

تعريف: العشوائية هي التجربة التي نتائجها ترتبط بالصدفة وكذلك غير مؤكدة النتائج.

ومن المفيد ايضا وحتى نستطيع فهم نظرية الاحتمالات بشكلها الجيد لابد من تقديم التعريفات التالية والتركيز على مزيد من الامثلة.

تعريف : الفضاء العيني لتجربة ما هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة من هذه التجربة وسنرمز لها بالرمزΩ.

تعريف: الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني وسنرمز له بأي حرف من الحروف الابجدية.

وهناك عدة انواع من االاحداث نقدم تعريفاتها.

تعريف: الحدث البسيط هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على عنصر واحد من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المركب هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على اكثر من عنصر من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المؤكد هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على جميع عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المستحيل هو الحدث الذي يستحيل وقوعه ومجموعته لا تحتوي على عناصر من عناصر الفضاء العيني.

بعد تناولنا لهذه التعريفات نورد الامثلة التالية.

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحد

1) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) الحدث أ الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع الحدث.

3) الحدث ب الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع هذا الحدث

4) الحدث جـ الذي يمثل ظهور العدد على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

5) الحدث د الذي يمثل ظهور عدد اقل من او يساوي 6 على الوجه العلوي واذكر نوعه.

6) الحدث هـ الذي يمثل ظهور العدد7 على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

الحل: 1) الفضاء العيني للتجربة Ω= {1،2،3،4،5،6}

2) الحدث أ= {2،4،6} وهذا حدث مركب لاحتواء مجموعته على اكثر من عنصر.

3) الحدث ب= {2،3،5} وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

4) الحدث جـ= {1} وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

5) الحدث د= {1،2،3،4،5،6} وهذا حدث مؤكد لاحتواء مجموعته على عناصر الفضاء العيني.

6) الحدث هـ = { }= ∅ وهذا حدث مستحيل لعدم احتواء مجموعته على عناصر

مثال: في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين اكتب مايلي.

1) الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) الحدث الذي يمثل ظهور وجهتين متشابهين على الوجهين الظاهرين.

3) الحدث الذي يمثل ظهور كتابة واحدة على احد الوجهين الظاهرين.

4) الحدث الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل

5) الحدث الذي يمثل ظهور صورتين على الاكثر.

الحل: 1) Ω= [ص ص، ص ك، ك ص، ك ك] حيث ص يمثل ظهور صورة ، ك يمثل ظهور كتابة.

2) أ= [ص ص، ك ك] يعني ظهور صورتين او كتابتين.

3) جـ = [ص ك، ك ص]

4) جـ = [ص ك، ك ص، ص ص]

5) د = [ك ك ، ك ص، ص ك ، ص ص]=Ω

مثال: صندوق به 8 مفاتيح كان 5 منها سليم يحب مصباحان على التوالي دون ارجاع اوجد ما يلي

1) عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل ظهور اثنتين سليميتن.

3) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل ظهور اثنتين تالفتين.

4) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل ظهور احدهما سليم والاخرى تالفة.

الحل:

1) عدد عناصر الفضاء العيني= $\binom{8}{2} = \frac{!8}{!2!(2-8)} = \frac{7\times8}{1\times2\times!6} = 28$ حيث ان عدد اللامبات = 8 ويراد اختيار اثنتين منها.

2) عدد عناصر الحدث أ= $\binom{5}{2} = \frac{4\times5}{1\times2} = 10$ حيث ان عدد المصابيح السليمة هو 5 ويراد اختيار اثنتين منها.

3) عدد عناصر الحدث ب= $\binom{3}{2} = \frac{2\times3}{1\times2} = 3$ حيث ان عدد المصابيح التالفة 3 ويراد اختيار اثنتين منها.

4) عدد عناصر الحدث جـ= $\binom{3}{1}\binom{5}{1}$ =5×3=15 حيث ان عدد المصابيح السليمة خمسة ويراد اختيار احدهما وكذلك المصابيح التالفة ثلاثة ويراد اختيار احدهما.

مثال: كيس به ثمانية كرات مرقمة من 1 الى 8 اوجد مايلي.

1) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل سحب ثلاث كرات في آن واحد دون ارجاع.

2) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل سحب ثلاثة كرات على التتابع دون ارجاع.

3) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل سحب ثلاثة كرات مع الاجاع.

الحل: 1) عدد عناصر الحدث أ = $\binom{8}{3} = \frac{6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 56$

2) عدد عناصر الحدث ب= 7×8×6=336 حيث ان اختيار المرة الاولى يتم بثمانية طرق مختلفة ولان السحب دون اعادة فلسحب الكرة الثانية يمكن ان يتم بسبعة طرق مختلفة لانه تبقى في الكيس سبعة كرات اما السحب الكرة الثالثة فيتم ذلك بستة طرق وهكذا.

3) عدد عناصر الحدث جـ= 8×8×8=512 لان السحب مع الاعادة.

تعريف: نسمي الحدثان أ، ب من الفضاء العيني Ω بأنهما حدثان منفصلان اذا كان أ∩ب=∅. أي لايوجد عناصر مشتركة بين الحدثين.

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة اذا كان الحدث أ يمثل ظهور عدد زوجي، والحدث ب يمثل ظهور عدد فردي على الوجه العلوي فهل الحدثان أ، ب حدثان منفصلان؟

الحل: نكتب عناصر الحدث أ= {6،4،2}.

عناصر الحدث ب= {5 ،3،1}.

∴ أ∩ب=∅ فان الحدثان أ، ب منفصلان.

10-2) نظريات في الاحتمالات

نظرية : اذا كان أ ⊂ Ω فان

(1) ∀ أ ⊂ Ω فان 0 ≤ح(أ)≤1

2) ح(Ω)=1

3) ح(Ω)= 0.

4) ح(أ∪ب) = ح(أ) + ح(ب) − ح(أ∩ب)

5) أ∩ب ← Ø ⇐ ح(أ∪ب)=ح(أ)+ح(ب).

6) ح(أ−ب)=ح(أ)−ح(أ∩ب)=ح(أ∩ $\bar{\text{ب}}$)

7) ح(ب−أ)=ح(ب)−ح(أ∩ب)=ح($\bar{\text{أ}}$ ∩ب)

وهنا بعض الخصائص في الاحتمالات نورد اهمها

1) اذا كانت الاحداث $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$، ....$أ_ن$ كل اثنين فيهما احداثا منفصلة فاذا كان $أ_1$∪$أ_2$∪$أ_3$... . ∪$أ_ن$=Ω فان

ح($أ_1$∪$أ_2$∪$أ_3$..... ∪$أ_ن$)=ح ($أ_1$) +ح ($أ_2$)+ح ($أ_3$)+.... +ح ($أ_ن$)=ح(Ω)=1

2) اذا كان أ ⊃ب ⇐ ح(أ)≥ح(ب).

3) ح($\bar{\text{أ}}$)=1−ح(أ) حيث $\bar{\text{أ}}$ هي متمم الحدث أ بالنسبة لـΩ.

مثال : اذا كان Ω= {$أ_1$، $أ_2$،$أ_3$، $أ_4$} والدوال التالية معرفة على Ω فأي من هذه الدوال هي دالة احتمالية.

1) $ح_1(أ_1)=\frac{1}{3}$، $ح_1(أ_2)=\frac{1}{4}$، $ح_1(أ_3)=\frac{1}{5}$، $ح_1(أ_4)=\frac{1}{6}$

2) $ح_2(أ_1)=\frac{1}{3}$، $ح_2(أ_2)=\frac{1}{3}$، $ح_2(أ_3)=\frac{-1}{3}$، $ح_2(أ_4)=\frac{1}{6}$

3) $ح_3(أ_1)=\frac{1}{4}$، $ح_3(أ_2)=$ صفر، $ح_3(أ_3)=\frac{1}{2}$، $ح_3(أ_4)=\frac{1}{4}$

ملاحظة: حتى تكون الدالة المعطاة دالة احتمالية يجب ان يكون مجموع احتمالات عناصر الفضاء العيني .

الحل: (1) $أ_1$∪$أ_2$∪$أ_3$∪ أ $_4$ =Ω

1) $ح_1(أ_1)+ح_1(أ_2)+ح_1(أ_3)+ح_1(أ_4)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{20+15+12+10}{60}=\frac{57}{60}\neq 1$

∴ الدالة ليست دالة احتمالية.

2) ∴ $ح_2(ح_3)=\frac{-1}{3}$ ولايجوز ∴ $ح_2$ ليس دالة احتمال.

3) $ح_3(أ_1)+ح_3(أ_2)+ح_3(أ_3)+ح_3(أ_4)=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

$0\leq ح_3(أ_ي)\leq 1$ ، $أ_1 \cup أ_2 \cup أ_3 \cup أ_4 = \Omega$

∴ فالدالة $ح_3$ دالة احتمال.

مثال: اذا كان $\Omega=\{أ_1، أ_2، أ_3، أ_4\}$ واذا كان ح دالة احتمالية معرفة على Ω اوجد قيمة المجهول في كل مما يلي.

1) $ح(أ_1)=\frac{1}{3}$ ، $ح(أ_2)=\frac{1}{6}$ ، $ح(أ_3)=\frac{1}{9}$ ، $ح(أ_4)=؟$

2) $ح(أ_1)=ح(أ_2)=\frac{1}{4}$ ، $ح(أ_3)=2$ ح$(أ_4)$ = اوجد ح$(أ_3)=؟$ ، ح$(أ_4)=؟$

الحل: 1) $ح(أ_1)+ح(أ_2)+ح(أ_3)+ح(أ_4)=1$ لان الدالة ح احتمالية.

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+ح(أ_4)=1$

$\frac{6+3+2}{18}+ح(أ_4)=1 \Leftarrow \frac{11}{18}+ح(أ_4)=1$

∴ $ح(أ_4)=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}$

2) اذا فرضنا ان ح$(أ_4)$ =س فان ح $(أ_3)$ = 2 س وعليه فان

$ح(أ_1)+ح(أ_2)+ح(أ_3)+ح(أ_4)=1$ لان الدالة ح احتمالية

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2س+س=1$

$\frac{2}{4}+3س=1$

$3س=1-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$

∴ $س=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ∴ $ح(أ_4)=\frac{1}{6}$ ، $ح(أ_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

مثال: اذا كان لدينا ح(أ)= $\frac{1}{2}$ ، ح(ب)= $\frac{3}{8}$ ، ح(أ ∩ ب)= $\frac{1}{4}$

اوجد ما يلي:

1) ح(أ∪ب) 2) ح(أ̅) 3) ح(ب̅) 4) ح(أ̅ ∩ ب̅) 5) ح(أ̅ ∪ ب̅) 6) ح(أ∩ب̅) 7) ح(أ̅ ∩ ب).

الحل: 1) ح(أ∪ب) = ح(أ) + ح(ب) − ح(أ∩ب)

2) $= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4+1-2}{8} = \frac{3}{8}$

3) ح(ب̅) = 1 − ح(ب) = $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

4) ح(أ̅ ∩ ب̅) = ح($\overline{\text{أ∪ب}}$) = 1 − ح(أ∪ب) = $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

5) ح(أ̅ ∪ ب̅) = ح($\overline{\text{أ∩ب}}$) = 1 − ح(أ∩ب) = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ملاحظة: القانونان اللذان ساعدتا في حل الجزء 4،5 هما قانونان ديمورغات في الاحتمالات وهما:

1) ح($\overline{\text{أ∩ب}}$) = ح(أ∪ب̅)

2) ح(أ∪ب̅) = ($\overline{\text{أ∩ب}}$)

6) ح(أ∩ب̅) = ح(أ) − ح(أ∩ب) = $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

7) ح(أ̅ ∩ ب) = ح(ب) − ح(أ∩ب) = $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

10-3) الفضاء العيني المنتظم:

تعريف: اذا كان احتمال وقوع كل مفردة من مفردات الفضاء العيني متساوٍ فاننا نقول لهذا الفضاء العيني بالمنتظم.

فاذا كان أ حدث في Ω فان احتمال أ يمكن ايجاده من العلاقة

$$ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \quad ....(1-10)$$

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ان احتمال ظهور كل عنصر من الفضاء العيني ح(1)=ح(2)=ح(3) =ح(4)=ح(5)=ح(6)= $\frac{1}{6}$.

وعليه فان هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال المنتظم.

مثال: في تجربة سباق الخيول فان احتمال نجاح خيل مختلف عن الخيل الآخر وعليه فان هذا النوع من الاحتمال يسمى بالاحتمال غير المنتظم.

مثال: كيس به خمسة كرات حمراء، 4 بيضاء، 3 زرقاء سحب من الكيس كرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل: ليكن أ هو الحدث الذي يمثل ظهوره كرة بيضاء فان عدد الكرات البيضاء في الكيس 4 وعدد الكرات جميعها 12.

$$\therefore ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال: صندوق به 12 كرة مرقما من 1 الى 12 سحب من الصندوق كرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة عليها رقم يقبل القسمة على 3.

الحل: ليكن الحدث هو أ وعليه فان

أ={3،6،9،12} ، ن(أ)=4 ، ن(Ω)=12 ∴

$$ح(أ) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال: صندوق به 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقاء، 4 كرات صفراء؟ ما احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان حمراوان.

3) سحبت اربعة كرات على التوالي دون ارجاع ما احتمال ان تكون اول كرتان مسحوبتان حمراوان والثالثة صفراء والرابعة زرقاء؟

4) سحبت ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء والثالثة زرقاء؟

الحل: 1) ليكن الحدث المطلوب أ فان:

$$ح(أ) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{4\times5}{1\times2}}{\frac{11\times12}{1\times2}} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

2) ليكن الحدث المطلوب ب فان

$$ح(ب) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{5}{1}\times\frac{3\times4}{1\times2}}{\frac{10\times11\times12}{1\times2\times3}} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

3) ليكن الحدث المطلوب هو جـ فان ح(جـ)

$$ح(جـ) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{2}{99}$$

4) ليكن الحدث المطلوب د فان ح(د)

$$ح(د) = \frac{4}{12}\times\frac{5}{12}\times\frac{3}{12} = \frac{5}{144}$$

لان السحب مع الاعادة وعليه يبقى عدد الكرات الكلي=12 وعدد الكرات من كل لون ثابت.

مثال: صندوق به 15 مصباح خمسة منها تالفة سحبت من الصندوق ثلاث مصابيح معا اوجد الاحتمالات التالية.

1) احتمال ان الثلاثة مصابيح سليمة.

2) احد هذه المصابيح الثلاث تالف.

3) احتمال احدها على الاقل تالف.

الحل: 1) عندما يكون عدد المصابيح التالفة خمسة مصابيح معنى ذلك ان عشرة فيها سليم ويراد سحب 3 مصابيح من بين خمسة عشر مصباح ويتم ذلك بعدد الطرق المختلفة = $\binom{15}{3} = \frac{13\times14\times15}{1\times2\times3} = 455$ طريقة

ويراد ان تكون الثلاثة مصابيح المسحوبة سليمة وبما ان عدد المصابيح السليمة 10 لذا يمكن اختيار ثلاثة منها بعدد من الطرق = $\binom{10}{3} = \frac{8\times9\times10}{1\times2\times3} = 120$ طريقة مختلفة

وعليه فاذا كان الحدث المطلوب هو أ فان ح(أ)= $\frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

2) ليكن الحدث ب هو الحدث المطلوب فان

$$ح(ب) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5}{1}\times\frac{9\times10}{1\times2}}{\frac{13\times14\times15}{1\times2\times3}} = \frac{5\times45}{455} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

3) ان احتمال الحصول على الاقل واحدة تالفة هو متمم للحدث الذي يمثل الحصول على ثلاثة سليمة فاذا كان الحدث يمثل جـ فان

$$ح(جـ) = ح(\overline{أ}) = 1 - ح(أ)$$

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثال: اذا كان لدينا عشر بطاقات مرقمة من 1 الى 10 بداخل صندوق خلطت بشكل جيد اوجد ما يلي.

1) اذا سحبت بطاقتان معا من الصندوق ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين على البطاقتين عدد فردي.

2) اذا سحبت بطاقتان على التوالي دون ارجاع البطاقة المسحوبة ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين عددا فرديا.

3) اذا سحبت بطاقتان على التوالي وكان السحب مع الارجاع ماحتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين عددا فرديا.

الحل: 1) ان سحب بطاقتين من بين عشرة بطاقات يتم بعدد من الطرق المختلفة عددها عدد الطرق = $\binom{10}{2} = \frac{9 \times 10}{1 \times 2} = 45$.

اما بالنسبة لسحب بطاقتين بحيث يكون مجموعهما فردي يجب ان تكون البطاقة الاولى اما عدد زوجي والبطاقة الثانية فردية لان المجموع فردي أي عدد زوجي+عدد فردي = عدد فردي وهنا لدينا خمسة اعداد فردية وخمسة اعداد زوجية وهي على النحو التالي:

العدد الفردي	العدد الزوجي
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

ونستطيع تمثيل عدد الطرق المختلفة لسحب هذه البطاقات ليكون المجموع عدد فردي بالشجرة على النحو ومن خلال هذا التمثيل نلاحظ ان عدد الطرق المختلفة=5×5=25 طريقة

(1) فاذا كان الحدث يمثل أ فان

$$\text{ح(أ)} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

2) اذا كان الحدث المطلوب ب فان

$$\text{ح(ب)} = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

3) اذا كان الحدث المطلوب هو جـ فان

$$\text{ح(جـ)} = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$$

لان السحب مع الاعادة فان عدد الطرق المختلفة =10×10=100

مثال: صف به 25 طالبا ذكور 15 اناثا رسب 9 طلاب، 6 طالبات في مادة الرياضيات اختير احد الطلبة بشكل عشوائي اوجد احتمال ان يكون الطالب المختار هو من الذكور او راسب في الرياضيات.

الحل: عدد عناصر الفضاء العيني ن(Ω) =25+15=40

وليكن الحدث أ هو الممثل لان يكون الطالب المختار هو من الذكور فان ن(أ)=25 وان الحدث ب يمثل ان يكون الطالب المختار راسب في الرياضيات فان ن(ب) =9+6=15 وان الحدث أ∩ب هو ان يكون الطالب المختار هو من الذكور وراسب في الرياضيات وان ن(أ∩ب)=9 وعليه فان

$\text{ح(أ)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$، $\text{ح(ب)} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$، $\text{ح(أ∩ب)} = \frac{9}{40}$ والمطلوب ايجاد ح(أ∪ب) لذا نجد هذا الاحتمال من العلاقة ح(أ∪ب)=ح(أ)+ح(ب)−ح(أ∩ب)

$$= \frac{25}{40} + \frac{15}{40} - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}.$$

مثال: في تجربة القاء حجر نرد متمايزين في الهواء اوجد الاحتمالات التالية.

1) ظهور عددين متساويين على الوجهين العلويين.

2) ظهور المجموع 10 على الوجهين الظاهرين.

3) ظهور المجموع 13 على الوجهين الظاهرين.

4) ظهور عدد فردي على احد الوجهين الظاهرين فقط.

5) ظهور عدد اكبر من 4 على احد الوجهين الظاهرين.

6) ظهور مجموع 9 على الاقل على الوجهين الظاهرين.

7) ظهور مجموع 6 على الوجهين الظاهرين او عدد زوجي على كلا الوجهين الظاهرين.

8) ظهور مجموع فردي على الوجهين الظاهرين.

الحل: ان الفضاء العيني لهذه التجربة Ω {(1،1)، (2،1)،......،(6،6)}

(1) أ= {(1،1)،(2،2)،(4،4)،(5،5)،(6،6)} ⇐ ح(أ) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

(2) ح (ب)= {(6،4)،(4،6)،(5،5)} ⇐ ح(ب) = $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(3) ح(ب)= ∅ ⇐ ح(جـ)=صفر.

4) د= {(1،2)،(1،4)،(1،6)،(2،1)،(2،3)،(2،5)،(3،2)،(3،4)،(3،6)،(4،1)،

(4،3)،(4،5)،(5،2)،(5،4)،(5،6)، (6،1)، (6،3)، (6،5)}.

∴ ح(د)= $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

5)هـ= {(5،1)،(1،5)،(2،5)،(5،2)،(3،5)،(5،3)،(4،5)،(5،4)،(6،5)،(5،6)،(1،

6)،(6،1)،(2،6)،(6،2)،(3،6)،(6،3)،(4،6)،(6،4)}

ح(هـ)= $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

6) و = {(4،5)،(5،4)،(5،5)،(6،5)،(5،6)،(6،6)،(6،4)،(4،6)،(3،6)،(6،3)}.

$$ح(و) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

7) ل = {(2،4)،(4،2)،(1،5)،(5،1)،(3،3)،(2،2)،(4،4)،(6،6)،(2،6)،(6،2)،
(4،6)،(6،4)}.

$$ح(ل) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

8) ع = {(2،3)،(3،2)،(1،4)،(4،1)،(2،1)(1،2)،(1،6)،(6،1)،(2،5)،(5،2)،
(3،4)،(4،3)،(6،3)،(3،6)،(5،6)،(6،5)}.

$$ح(ع) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

10-4) الاحتمال الشرطي والاحداث المستقلة.

تعريف : ان احتمال حدث معين شرط وقوع حدث آخر ويرمزله بالرمز

$$ح(أ/ب) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} \Leftarrow ح(أ \cap ب) = ح(أ/ب) \times ح(ب)$$

$$ح(ب/أ) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(أ)} \Leftarrow ح(أ \cap ب) = ح(ب/أ)ح(أ) \quad \text{..........(2-10)}$$

وكذلك يمكن استنتاج ان الاحداث المتامة.

$$ح(\bar{أ}/\bar{ب}) = \frac{ح(\bar{أ} \cap \bar{ب})}{ح(\bar{ب})} = \frac{ح(\overline{أ \cup ب})}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(ب)}$$

$$ح(\bar{ب}/\bar{أ}) = \frac{ح(\bar{أ} \cap \bar{ب})}{ح(\bar{أ})} = \frac{ح(\overline{أ \cup ب})}{1 - ح(أ)} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(أ)}$$

مثال: اذا كان ح(أ)= $\frac{1}{3}$ ح(ب)= $\frac{1}{4}$ ، ح(أ ∪ ب)= $\frac{1}{2}$ والمطلوب ايجاد ما يلي

1) ح(أ/ب) 2) ح(ب/أ) 3) ح($\bar{أ}$ / $\bar{ب}$)

4) ($\bar{ب}$ / $\bar{أ}$) 5) ح(أ ∩ $\bar{ب}$).

الحل: 1) من العلاقة

ح(أ ∪ ب) = ح(أ)+ح(ب)−ح(أ ∩ ب)

ح(أ ∩ ب)=ح(أ)+ح(ب)−ح(أ ∪ ب)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$$

∴ ح(أ/ب) $= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

∴ ح(ب/أ) $= \frac{ح(أ ∩ ب)}{ح(ب)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

3) $ح(\bar{أ} / \bar{ب}) = \frac{ح(\bar{أ} ∩ \bar{ب})}{ح(\bar{ب})} = \frac{ح(\overline{أ ∪ ب})}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - ح(أ ∪ ب)}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4) $ح(\bar{ب} / \bar{أ}) = \frac{ح(أ ∩ \bar{ب})}{ح(\bar{أ})} = \frac{1 - ح(أ ∪ ب)}{1 - ح(أ)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

5) ح(أ ∩ $\bar{ب}$)=ح(أ)−ح(أ ∩ ب)= $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{4-1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

نظرية: اذا كان أ ∩ ب=∅ فان ح(أ ∩ ب)=صفر وعليه فان ح(أ/ب)=صفر، ح(ب/أ)=صفر.

10-5) الاحداث المستقلة:

تعريف: تكون الاحداث مستقلة اذا كان وقوعها بعضها البعض واذا كان أ، ب حدثان فحتى يكونا مستقلين فان.

1) ح(أ ∩ ب)=ح(أ) ح(ب)
2) ح(أ/ب)=ح(أ)، ح(ب/أ)=ح(ب)

(10-3).............

ملاحظة: يجب التفريق بين الاحداث المستقلة والاحداث المنفصلة حيث ان الاحداث المستقلة تقاطعها ليس ∅ بينما الاحداث المنفصلة فان تقاطعها تساوي ∅.

مثال: في تجربة القاء قطعتي نقود متمايزتين اذا كان الحدث أ يمثل ظهور الصورة على القطعة الاولى والحدث ب يمثل ظهور صورة على الثانية فهل الحدثان أ، ب مستقلين؟

الحل: نكتب أولاً المجموعات على صيغة عناصر

أ = { ص ك، ص ص}، ب= {ك ص ، ص ص}. وعليه فان

أ ∩ ب={ص ص}، ح(أ)= $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، ح^2(أ ∩ ب)= $\frac{1}{4}$

ح(ب) = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

∴ ح(أ)×ح(ب)= $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ =ح(أ ∩ ب)= ∴ الحدثان أ،ب مستقلين

نتيجة: $ح\left(\overline{أ} \cap \overline{ب}\right) = ح\left(\overline{أ}\right) \times ح\left(\overline{ب}\right)$

نظرية: اذا كان $أ_1$، $أ_2$ حدثان من Ω فان

1) $ح\left(\overline{أ_1 \cup أ_2}\right) = ح\left(\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}\right) = 1 - ح\left(أ_1 \cup أ_2\right)$

2) $ح\left(\overline{أ_1 \cap أ_2}\right) = ح\left(\overline{أ_1} \cup \overline{أ_2}\right) = 1 - ح\left(أ_1 \cap أ_2\right)$

وهذان القانونان يفيدان في حل كثير من المسائل في الاحتمالات.

6-10) نظرية بيز:

نص النظرية: اذا كان $أ_1$،$أ_2$،.....$أ_ن$ احداث في Ω بحيث ان

$أ_1$،$أ_2 \cap ..... \cap أ_ن = \emptyset$

$أ_1$،$أ_2 \cup ..... \cup أ_ن = \emptyset$

كما هو موضح بالشكل وبرز حدث يشترك في جميع الاحداث الجزئية مثل ي فان احتمال حصول الحدث ي بمعلومية وقوع الحدث $أ_ر$ يكون على النحو التالي.

$$ح\,(ى/أ_ر) = \frac{ح\,(أ_ر/ي).ح\left(أ_ر\right)}{ح\left(أ_1/ي\right)ح\left(أ_1\right) + ح\left(أ_2/ي\right)ح\left(أ_2\right) + ... + ح\left(أ_ن/ي\right)ح\left(أ_ه\right)} \quad ......(4-10)$$

مثال: في مصنع للمسامير الالة رقم 1 30٪ من المسامير والالة رقم 2 40٪ والالة رقم 3=30٪ ونسب التالف هي ان الالة رقم 1 و2 للالة رقم 4 والالة رقم 3 واخذت مما انتجه المصنع ووجد انه تالف ما احتمال انه لم يصنع بواسطة الالة رقم3.

الحل: نضع ملخصاً للبيانات المعطاة:

$ل(م_1)=00.30$	$ح(أ_1/ب)=0.1$
$ل(م_2)=0.40$	$ل(أ_2/ب)=0.2$

ل(م$_3$)=0.30　　　　ل(أ$_3$/ب)=0.4

$$ح(ب/أ_3)=\frac{ح(أ_3)(أ_3/ب)}{ح(أ_1)(أ_1/ب)+ح(أ_2)(أ_2/ب)+ح(أ_3/ب)ح(أ_3)}$$

$$=\frac{0.04\times0.3}{0.04\times0.30+0.02\times0.40\times0.01\times0.30}$$

$$=\frac{0.012}{0.02+0.008+0.003}$$

$$=\frac{0.012}{0.023}=0.52$$

ح(ب/أ)　$1-0.52=0.48$

مثال: ينتج احد معامل الاحذية ما نسبته 60٪ والآخر 40٪ من الانتاج الكلي فـاذا علم ان نسبة السليم من الانتاج الاولي = 90٪ والثاني 80 ٪ .

1) المطلوب ايجاد احتمال سحب وحدة انتاج عشوائية خالية من العيوب.

2) اذا سحبت وحدة انتاج عشوائيا وتبـين انهـا خاليـة مـن العيـوب مـا احتمـال ان تكون من المعمل الاول.

ح(I)=0.60، ح(П)=0.40

ح(س/I)=0.90، ج(س/П)=0.80

1) ح(س)=ح(I)× ح(س/I)+ح(П)×ح(س/П)

$=0.60\times0.90+0.40\times0.80=0.54+0.32=0.86$

2) ح(П/I)= $\frac{ح(س_1/I)\times ح(I)}{ح(س)}=\frac{0.60\times0.90}{0.86}=\frac{0.54}{0.86}$

تمارين عامة على الاحتمالات

س1: من الشكل جانبا وبالاستفادة من البيانات التالية:

ح($أ_1$)= ح($أ_2$)= ح($أ_3$)= $\frac{1}{4}$

ح($أ_4$) =ح($أ_5$)= ح($أ_6$)= $\frac{1}{8}$

ح($أ_7$)= ح($أ_8$)= $\frac{1}{16}$

والمطلوب ايجاد ما يلي:

1) ل($أ_1$)   2) ح($\overline{أ}$)   3) ح(أ)

4) ح(أ$\cup$ب)   5) ح($أ_1 \cap أ_2$)   6) ح($أ_1 / أ_2$)

7) ح($أ_2 / أ_1$)   8) ح($\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}$)   9) ح$\overline{(أ_1 \cap أ_2)}$

10) ح$\overline{(أ_1 \cap أ_2)}$

س2 : على فرض ان ح($أ_1$)=0.3 ح($أ_2$)=0.5 ح($أ_1 \cup أ_2$)=0.7 اوجد ما يلي:-

1) ح($أ_1 \cap أ_2$)   2) ح($\overline{أ_1}$)   3) ح($\overline{أ_2}$)

4) ($\overline{أ_1} \cup \overline{أ_2}$)   5) ح$\overline{(أ_1 \cup أ_2)}$

6) ح$\overline{(أ_1 \cap أ_2)}$ 7) ح($أ_1 \cup أ_2$)

س3 : في تجربة القاء حجر النرد مرة واحدة اذا كانت الاحداث التالية:-

$أ_1$={1،6} ، $أ_2$={1،3،5} اوجد ما يلي:

1) ح($أ_1 \cap أ_2$)   2) ح($أ_1 \cup أ_2$)   3) ($أ_1$)

4) ح($\bar{أ}_2$)　　5) ح($أ_1 / أ_2$)　　6) ح($أ_2 / أ_1$)

7) ح($\bar{أ}_1 / \bar{أ}_2$)　　8) ح($أ_1 \cup أ_2$)　　9) ($\bar{أ}_1 \cap \bar{أ}_2$)

10) ح $\overline{(أ_1 \cap أ_2)}$　　11) هل الحدثان مستقلين

س4: في تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثم حجر نر منتظم مرة واحدة اوجد الاحتمالات التالية:-

1- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة النقود.

2- الحدث الذي يمثل ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.

3- الحدث الذي يمثل عدم ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.

4- الحدث الذي يمثل ظهور صورة على الوجه العلوي لقطعة نقود وعدد اقل من 3 على حجر النرد.

5- الحدث الذيس يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة نقود والعدد 4 او 6 على الوجه العلوي لحجر النرد.

س5: ليكن ف={ $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$، $أ_4$، $أ_5$، $أ_6$، $أ_7$ } ولتكن احتمالات الاحداث البسيطة معينة كما يلي: ح($أ_1$)=ح($أ_2$)=ح($أ_6$)

ح($أ_3$)=2ح($أ_2$)= $\frac{1}{2}$ ح($أ_1$)

ح($أ_5$)= $\frac{1}{2}$ ح($أ_7$)= $\frac{1}{2}$ ح($أ_1$)

اوجد ح($أ_1$)، ح($أ_2$)، ح($أ_3$)، ح($أ_4$)، ح($أ_5$)، ح($أ_6$)، ح($أ_7$)

س6 : اذا كانت $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$ ثلاثة احداث معينة لفضاء عيني وكانت احتمالات الوحدات كما يلي : ح($أ_1$)= 2ح($أ_2$)، ح($أ_3$)= $\frac{1}{2}$ ح($أ_1$) اوجد

$\text{ح}(\text{أ}_1)$، $\text{ح}(\text{أ}_2)$، $\text{ح}(\text{أ}_3)$، $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$ ، $\text{ل}(\text{أ}_1 \cup \text{أ}_3)$

س 7: سحبت كرة عشوائيا من صندوق به 3 كرات بيضاء، 6 كرات حمراء، 8 زرقاء ، 9 خضراء اوجد الاحمالات التالية:-

1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.

3- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة زرقاء.

4- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء.

5- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما حمراء او خضراء.

6- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما بيضاء او خضراء.

7- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء او ليست بيضاء.

س 8: كيس به ثلاث كرات بيضاء، 2 صفراس، 4 حمراء، 5 زرقاء، سحبت منه كرتان عشوائيا احسب الاحتمالات التالية:-

1- كلا الكرتان زرقاوان

2- واحدة بالضبط زرقاء

3- على الاقل واحدة زرقاء.

س 9: اذا كان أ_1، أ_2 حدثان معينان وكان $\text{ح}(\text{أ}_1 \cup \text{أ}_2) = \frac{5}{8}$

$\text{ح}(\text{أ}_1)\text{ة} = \frac{1}{2}\ \text{ح}(\text{أ}_1 \cap \text{أ}_2) = \frac{1}{3}$ احسب الاحتمالات التالية:

1) $\text{ح}(\bar{\text{أ}}_2)$ $\text{ح}(\text{أ}_1 \cap \text{أ}_2)$ 2) $\text{ل}(\text{أ}_2)$ 3) $\text{ل}(\bar{\text{أ}}_2)$

4) $\text{ل}(\text{أ}_1/\text{أ}_2)$ 5) $\text{ل}(\overline{\text{أ}_1 \cup \text{أ}_3})$ 6) $\text{ل}(\bar{\text{أ}}_1 \cup \bar{\text{أ}}_3)$



Probabilities الاحتمالات

10-1 حساب المضروب Factorial N

النص الرياضي للمسالة

اكتب برنامجاً لحساب المضروب (N!) للعدد N، حيث N عدد صحيح موجب، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$N!=N.(N-1)....3.2.1$$

خوارزمية الحل

-1 عين العدد (N) المطلوب حساب المضروب له.

-2 تاكد من ان (N) اكبر من أو يساوي صفر.

-3 احسب المضروب (F1) للعدد (N) كما يلي.

(أ) اذا كان (N) يساوي صفراً، فان المضروب = 1 بموجب التعريف.

(ب) احسب المقدار (Nx...x3 x2 x1) وذلك بضرب العدد 1 في العنصر الاول (N2) من عناصر التعبير؛ ثم استخدم نتيجة العملية على اساس انها المضروب فيه multiplier للعنصر الثاني (N2) من عناصر

التعبير. كرر عملية ضرب النواتج الوسطية (P) بالعدداللاحق (N2) في التعبير إلى ان يكون العدد اللاحق (N2) في التعبير اكبر من العدد (N) المطلوب حساب المضروب له.

(جـ) ستكون القيمة النهائية للناتج الوسطي (P) هي قيمة المضروب (F1) للعدد (N).

4- اطبع النتيجة

5- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE FACTORIAL OF A NUMBER**
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N)**
030       INPUT N
040 REM ** 2. CHECK (N) TO ENSURE THAT IT IS ZERO OR GREATER **
050       IF N<0 THEN END
060 REM ** 3. COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF THE NUMBER (N)**
070 REM ** 3(A): IF (N) EQUALS 1, THEN THE FACTORIAL IS 1 **
080 REM ** IF (N) DOES NOT EQUAL 0, THEN CONTINUE TO COMPUTE (F1)**
090       IF N<>0 THEN GOTO 160
100 REM ** NOW AT THIS POINT, (N) EQUALS ZERO, THEN (F1)=1**
110       F1 =1
120 REM ** PRINT THE RESULT OF (F1)**
130       GOTO 300
140 REM ** 3(B): COMPUTE THE EXPRESSION (1)(2)(3)...(N)**
160       P=1
170 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N2) TO ZERO **
180       N2 = 0
190 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER (N2) TO GET THE NEXT VALUE**
200       N2=N2+1
210 REM ** CHECK (N2); IF IT IS GREATER THAN N THEN THE**
```

```
220 REM ** EVALUATION IS COMPLETED; OTHERWISE CONTINUE**
230        IF N2 > N THEN GOTO 280
240 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE OF(P) BY THEN NEXT (N2)**
250        P2=P2*N2
260        GOTO 200
270 REM ** 3(C):AT THIS POINT,VALUE OF P = THE FACTORIAL (F1)**
280        F1=P
290 REM ** 4. PRINT THE FACTORIAL (F1)**
300        PRINT 'THE VALUE OF ':N:' FACTORIAL IS ':F1
310 REM ** 5. END THE PROGRAM**
320        END
```

مثال احسب المضروب للعدد 8 (8!).

الحل: أدخل البيانات على الصور التالية:

8

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VALUE OF 8 FACTORIAL IS 40320

مثال احسب المضروب للعدد 0(0!) .

الحل: أدخل البيانات عليالصورة التالية:

0

وسف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VALUE OF 0 FACTORIAL IS 1

2-10 حساب التباديل Permutation

النص الرياضي للمسالة

اكتب برنامجاً لحساب عدد التباديل (P) لمجموعة من الاشياء المنفصلة عددها (n) التي يمكن أن تأخذها مجموعة فرعية من هذه المجموعة عددها (r) في كل مرة، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

خوارزمية الحل

1- عين القيم (n) و(r).
2- تاكد من ان كلاً من (n) و (r) اكبر من صفر.
3- تاكد من ان قيمة (r) ليست اكبر من قيمة (n).
4- عين المضروب (F1) للعدد n.
5- عين المضروب (F2) للقيمة (n-r).
6- احسب عدد التباديل(P1) وذلك بقسمة (F1) على (F2).
7- اطبع النتيجة
8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستعمل

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE PERMUTATIONS**
020 REM ** OF N THINGS TAKEN R AT A TIME**
030 REM ** 1.ENTER THE NUMBERS N & R**
040        INPUT N, R
050 REM ** 2. CHECK THAT N & R ARE GREATER THAN ZERO**
060        IF N<1 THEN END
070        IF R<1 THEN END
```

```
080 REM ** 3. CHECK THAT R IS NOT GRATER THAN N**
090       IF R>N THEN END
100 REM ** 4. COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF N.**
110 REM ** RESET THE INTERMEDIATE PRODUCT ACCUMULATOR (P2) TO 1 **
120       P2 = 1
130 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N1) TO ZERO INITIALLY **
140       N1 = 0
150 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER N1 TO OBTAIN THE NEXT VALUE**
160       N1 = N1 + 1
170 REM ** CHECK N1;IF IT IS GREATER THAN N,THNE THE EVALUATION**
180 REM ** OF FACTORIAL F1 IS COMPLETE;OTHERWISE CONTINUE**
190       IF N1>N THEN GOTO 250
200 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE F (P2) BY THE NEXT (N1) **
210       P2 = P2 * N1
220 REM ** GO BACK TO THE INSTRUCTION THAT PRODUCES THE NEXT (N1) **
230       GOTO 160
240 REM ** AT THIS STAGE,VALUE OF P2 EQUALS THE FACTORIAL (F1)**
250       F1 = P2
260 REM ** 5. COMPUTE THE PACTORIAL OF (N-R)**
270 REM ** COMPUTE THE QUANTITY (N-R)**
280       N2 = N-R
290 REM ** COMPUTE THE FACTORIAL OF N2 AND STORE IT IN (F2)**
300       P2 = 1
310       N1 = 0
320       N1 = N1 + 1
330       IF N1>N2 THEN GOTO 360
340       P2 = P2 * N1
350       GOTO 320
360       F2 = P2
370 REM ** 6. COMPUTE THE NUMBER OF PERMUTATIONS (P1) **
380       P1 = F1/F2
390 REM ** 7. PRINT THE NUMBER OF PERMUTATIONS (P1) **
400       PRINT N:'THINGS':R:'AT A TIME GIVES':P1:'PERMUTATIONS'
410 REM ** 8.END THE PROGRAM **
420       END
```

مثال ما هو عدد التباديل الناتجة من ترتيب أربعة ألوان من مجموع ستة ألوان.

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية :

6, 4

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

6 THNIGS 4 AT A TIEM GIVES 360 PERMUTATIONS

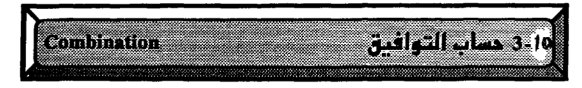
مثال ما هو عدد التباديل الناتجة من ترتيب خمسة أحرف من مجموع السبعة أحرف أ، ب، حـ، د، هـ، و، ز

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

7, 5

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

7 THINGS 5 AT A TIME GIVES 2520 PERMUTATIONS



3-10 حساب التوافيق Combination

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب عدد التوافيق (C) لمجموعة من الاشياء المنفصلة عددها (n) التي يمكن ان تأخذها مجموعة فرعية من هذه المجموعة عددها (r) في كل مرة، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

خوارزمية الحل

1- عين القيم (n) و(r).

2- تأكد من أن كلاً من (n) و(r)اكبر من صفر.

3- تأكد من أن قيمة (r) ليست اكبر من قيمة (n).

4- عين المضروب (F1) للعدد(n).

5- عين المضروب (F2) القيمة (n-r).

6- عين المضروب (F3) العدد (r).

7- احسب عدد التوافيق (C) وذلك بقسمة (F1) على حاصل ضرب (F2) و(F3).

8- اطبع النتيجة.

9- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE NUMBER OF COMBINATIONS**
020 REM ** OF N THINGS TAKEN R AT A TIME **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBERS N & R **
040       INPUT N, R
050 REM ** 2. CHECK IF N & R ARE GREATER THAN ZERO **
060       IF N<1 THEN END
070       IF R<1 THNE END
080 REM ** 3. CHECK IF R IS NOT GREATER THAN N **
090       IF R>N THEN END
100 REM  **4 COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF(N) **
110 REM ** RESET THE INTERMEDIATE PRODUCT ACCUMULATOR (P2) TO 1 **
120       P2 = 1
130 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N2) TO ZERO INITIALLY **
140       N2=0
150 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER (N1) TO OBTAIN THE NEXT VALUE
```

```
160       N2=N2+1
170 REM ** CHECK N2;IF IT IS GREATER THAN N,THEN THE EVALUATION **
180 REM ** OF FACTORIAL IS COMPLETE; OTHERWISE CONTINUE **
190       IF N2>N THEN GOTO 250
200 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE OF (P2) BY THE NEXT (N2) **
210       P2 = P2 * N2
220 REM ** GO BACK TO THE INSTRUCTION THAT PRODUCES NEXT (N2) **
230       GOTO 160
240 REM ** AT THIS STAGE THE VALUE OF (P2) EQUALS THE FACTORIAL (F1) **
250       F1 = P
260 REM ** 5. COMPUTE THE FACTORIAL OF (N-R) **
270 REM ** COMPUTE THE QUANTITY (N-R) AND PUT IT IN (L) **
280       L=N-R
290 REM ** COMPUTE THE FACTORIAL OF (L) **
300       P=1
310       N2=0
320       N2 = N2 + 1
330       IF N2>L THEN GOTO 350
340       P=P * N2
360       F2 = P
370 REM ** 6 COMPUTE THE FACTORIAL OF(R) AND PUT THE RESULT IN (F3) **
380       P = 1
390       N2 = 0
400       N2 = N2 + 1
410       IF N2>R THEN GOTO 440
420       P=P + N2
430       GOTO 400
440       F3=P
450 REM ** 7. COMPUTE THE NUMBER OF COMBINATIONS (C) **
460       C=F1/(F2 * F3)
470 REM ** 8.PRINT THE NUMBER OF COMBINATIONS (C) **
480       PRINT'N:'THNIGS':R:'AT A TIME GIVES':C'COMBINATIONS".
490 REM ** END THE PROGRAM **
500       END
```

مثال احسب عدد الطرق التي يمكن بها اختيار لجنة من أربعة اشخاص من خلال مجموعة مكونة من اثنى عشر شخصاً.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

12, 4

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

12 THINGS 4 AT A TIME GIVES 495 COMBINATIONS.

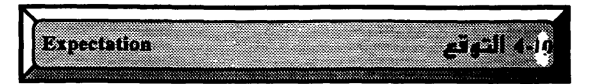
مثال كم عدد الكمات المكونة من ثلاثة حروف التي يمكن تشكيلها من الحروف أ، ب، ج، د، هـ؟

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية :

5, 3

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

5 THINGS 3 AT A TIME GIVES 120 COMBINATIONS



النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب التوقع الرياضي لاحد المتغيرات العشوائية (x) الذي تصاحبه الوظيفة الاحتمالية كما هو مبين فيما يلي:

$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	$f(x_n)$
x_i	x_1	x_2	.....	fx_n

حيث $f(x_i)$ تمثل احتمالية حدوث اية قيمة للمتغير العشوائي، (n) يمثل عدد ازواج النتائج، (x_i) يمثل النتيجة أو القيم الممكنة للمتغير العشوائي: احسب التوقع الرياضي باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(x_i)$$

خوارزمية الحل

1- عين العدد (N) الذي يمثل ازواج النتائج والاحتمالات المصاحبه لها (P, O) على الترتيب.

2- تاكد من أن العدد (N) يساوي 1 أو أكبر.

3- احسب القيمة المتوقعة للحدث(E) كما يأتي:

(أ) احسب القيمة المتوقعة expected value لكل نتيجة على انفراد (V)، وذلك بضرب النتيجة (O) في الاحتمال المصاحب لها (P).

(ب) اجمع النتائج المتوقعة لكل نتيجة على انفراد (V).

4- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية

5- اطبع النتيجة

6- توقف وأنه البرنامج

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE EXPECTED VALUE OF AN EVENT **
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF OUTCOME PAIRS **
030     INPUT N
040 REM ** 2.CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050     IF N<1 THEN END
060 REM ** 3. COMPUTE THE EXPECTED VALUE (E) **
070 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (E) TO ZERO INITIALLY **
080     E = 0.0
090 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO ZERO **
```

```
100        J=0
110 REM ** ENTER  NEXT PAIR OF OUTCOMES (O) & PROBABILITY (P)
120        INPUT O,P
130 REM ** 3 (A): COMPUTE THE EXPECTED VALUE (V) **
140        V=O * P
150 REM ** 3(B): COMPUTE THE EXPECTED VALUES (V) BY ADDING THE **
160 REM ** CURRENT VALUE (V) TO THE ACCUMULATOR (E) **
170        E=E+V
180 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (V) TO SHOW THAT A NEW VALUE **
190 REM ** HAS BEEN ADDED **
200        J=J+1
210 REM ** CHECK IF ALL PAIRS OF OUTCOMES AND ASSOCIATED
220 REM ** PROBABILITY (O, P) HAVE NOT BEEN ADDED THEN **
230 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER OTHERWISE CONTINUE **
240        IF J<>N THEN GOTO 120
250 REM ** 4. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NERREST THIRD **
260 REM ** DECIMAL PLACES**
270        E= INT (E*1000 + 0.5)/1000
280 REM ** 5. PRINT THE EXPECTATION VALUE (E) **
290        PRINT 'THE EXPECTED VALUE OF THE EVENT IS':E
300 REM ** 6.END THE PROGRAM **
310        END
```

مثال يبلغ عدد حوادث السيارات في احدى المدن في أي يوم ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 0 باحتمالية مناظرة قدرها 0.35، 0.32، 0.17، 0.06، 0.02، 0.01 على التوالي. ما هو عدد الحوادث المتوقعة في أي يوم؟

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية

6
0, 0,35
1, 0.32
2, 0.17
3, 0.06
4, 0.02
5, 0.01

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE EXPECTED VALUE OF THE EVENT IS 0.97

تمارين

1- احسب !5

2- احسب عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف التي يمكن تركيبها من حروف كلمة JIHAD.

3- احسب عدد الطرق التي يمكن بها قراءة ثلاثة من كتب الحديث من مجموع كتب الصحاح الستة.

4- افرض ان القيمة المتوقعة لاية دالة (J) يمكن حسابها كما يلي:

$$E(J) = \sum_{I=1}^{t} f(x_i)\, H(x_i)$$

اكتب برنامجاً لحساب ما يأتي:

(أ) $E(X^2)$

(ب) $E(2X + 1)$

(حـ) $E(3X^2-3)$

أخذاً بنظر الاعتبار ان دالة الاحتمالات هي

$f(x_i)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$X=x_i$	0	1	2	3

المراجع

مقدمة في الأساليب الاحصائية، د. شفيق العتوم، 1992.

أسس علم الاحصاء، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1991.

علم الاحصاء نظريات وتطبيقات، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1990.

مبادئ الاحصاء للمهن التجارية، كامل فليفل وفتحي حمدان، 1995.

علم الاحصاء الوصفي المبرمج

سلسلة الحاسبات الإلكترونية

للأستاذ الدكتور عوض منصور

الكتاب	عنوان الكتاب	الكتاب	عنوان الكتاب
1	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة فورتران 4	28	بيسك المرئية مع النوافذ
2	فورتران 77 مع تطبيقات عملية وهندسية	29	لوتس 3.1
3	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة بيسك	30	تيربو سي مع تطبيقات علمية
4	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة كوبول	31	علم نفسك أوتوكاد 11
5	تحليل نظم المعلومات باستخدام الكمبيوتر	32	سي ++ مع تطبيقات علمية
6	برمجة باسكال لطلبة الهندسة والعلوم	33	لوتس مع النوافذ
7	المرجع الشامل في برمجة بيسك	34	بي سي تولز 7.1
8	مقدمة في علم الحاسب الإلكتروني	35	المرجع السريع في قاعدة البيانات 4
9	برمجة بيسك للناشئين	36	اكسل 4
10	الحاسبات الشخصية واتمتة المكاتب	37	كواترو برو 5 مع النوافذ
11	التحليل الإحصائي المبرمج بلغة بيسك	38	فورتران 90
12	التحليل الإحصائي المبرمج بلغة فورتران	39	النوافذ 3.1 / خفايا وأسرار
13	طرق التحليل العددي المبرمج بلغة بيسك	40	ويرد برفكت مع النوافذ
14	طرق التحليل العددي المبرمج بلغة فورتران	41	سلسلة كمبيوتر الأطفال
15	المرجع الشامل في برمجة سي	42	تركيب البيانات
16	نورتن مع النوافذ	43	مايكرو سوفت ويرد 2 مع النوافذ
17	بحوث العمليات المبرمجة بالكمبيوتر	44	يونيكس: نظام تشغيل المستقبل
18	المرجع الشامل في كويك بيسك	45	إم. إس. دوس 6.0
19	برمجة لغة التجميع على أجهزة أي.بي.إم	46	إم. إس. دوس 6.2
20	البرمجة بلغة لوجو	47	نظام نوافذ NT
21	مجموعة البرامج الجاهزة	48	فوكس برو مع النوافذ
22	رياضيات البرمجة	49	فوكس برو، مشكلات وحلول
23	إم.إس.دوس 5.0	50	شبكة إنترنت
24	المرجع الشامل في قاعدة البيانات + III	51	البريد الإلكتروني مع النوافذ
25	المرجع الشامل في النوافذ 3.1	52	AUTOCAD 12 for windows
26	إكسل 5.0 مع النوافذ	53	المدخل إلى النوافذ 95
27	ويرد بيرفكت 5.1	54	المرجع الشامل في ويرد 6 العربي



دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع

مجمع الفحيص التجاري ـ هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص. ب ٩٢٢٧٦٢ ـ عمان ١١١٢١ ـ الأردن